

**20-е занятие. Левые и правые производные.  
Геометрический смысл производной  
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр**

Найти производные следующих функций:

$\boxed{A1}$   $y = \ln |f(x)|$ .       $\boxed{9866}$   $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$ .

$\boxed{985ав}$  а)  $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$ .      в)  $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ .

$\boxed{A2}$   $y = \ln(\cos(\arctg(\operatorname{sh}(2x))))$ .

Вычислить производные с помощью логарифмических производных:

$\boxed{A3}$   $y = x^x$ .       $\boxed{961}$   $y = x + x^x + x^{x^x}$ .

**Левые и правые производные**

$\boxed{1000}$   $f(x) = |x|$ .

**Теорема.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a; a+h)$  и дифференцируема на  $(a; a+h)$ , причём  $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = k$ . Тогда  $f'_+(a) = k$ .

(Дома доказать с помощью теоремы Лагранжа!)

$\boxed{9786вг}$  Найти производные:

б)  $y = |\sin^3 x|$ ;      в)  $y = \arccos \frac{1}{|x|}$ ;      г)  $y = [x] \sin^2 \pi x$ .

**Касательная к графику функции**

$\boxed{A4}$  Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом  $k$ , проходящей через точку  $(x_0, y_0)$ .

$\boxed{1055}$  Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

в точках: а)  $A(-1, 0)$ ; б)  $B(2, 3)$ ; в)  $C(3, 0)$ .

$\boxed{A5}$  Найти касательную к параболе  $y = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 3)$ , параллельную прямой  $y = x$ , и нормаль в точке касания.

$\boxed{A6}$  Найти угол между кривыми  $y = \operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  в точке пересечения, принадлежащей интервалу  $(0, \pi/2)$ .

$\boxed{1061}$  Под какими углами пересекаются кривые  $y = x^2$  и  $x = y^2$ ?

$\boxed{1064а}$  Определить угол между левой и правой касательными к кривой:  $y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$  в точке  $x = 0$ .

## Домашнее задание № 20

### Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Найти производные:

$$\boxed{9856\Gamma} \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}; \quad \text{г) } y = \log_{\varphi(x)} \psi(x).$$

$$\boxed{986авГ} \quad \text{а) } y = f(x^2); \quad \text{в) } y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}; \quad \text{г) } y = f(f(f(x))).$$

$$\boxed{A1} \quad y = \ln \sqrt[3]{\frac{e^x}{1 + \cos x}}. \quad (\text{Ответ: } y' = \frac{1 + \operatorname{tg}(x/2)}{3}.)$$

### Логарифмическая производная

$$\boxed{984\text{ б}} \quad y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}. \quad \boxed{984\text{ Г}} \quad y = (x + \sqrt{1+x^2})^n.$$

$$\boxed{984\text{ в}} \quad y = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x - a_n)^{\alpha_n}.$$

$$\boxed{A2} \quad y = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}. \quad \boxed{A3} \quad y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x.$$

### Левые и правые производные

Найти левые и правые производные следующих функций:

$$\boxed{1002} \quad f(x) = x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|. \quad \boxed{1003} \quad f(x) = \sqrt{\sin x^2}.$$

$$\boxed{1001} \quad f(x) = \lfloor x \rfloor \sin \pi x.$$

$$\boxed{978аг} \quad \text{а) } y = |(x-1)^2(x+1)^3|; \quad \text{г) } y = \lfloor x \rfloor \sin^2 \pi x.$$

(Указание к г: производную считать отдельно на интервалах  $(n, n+1)$ ; отдельно в целых точках, слева и справа).

### Касательная к графику

$\boxed{1056}$  В каких точках кривой  $y = 2 + x - x^2$  касательная к ней:

а)  $\parallel$  оси  $Ox$ ; б)  $\parallel$  биссектрисе первого координатного угла?

$\boxed{1060}$  Под каким углом кривая  $y = \ln x$  пересекает ось  $Ox$ ?

$\boxed{1062}$  Под какими углами пересекаются кривые  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$ ?

$\boxed{1064б}$  Определить угол между левой и правой касательными к кривой  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$  в точке  $x = 1$ .