Ограниченность

Далее мы будем часто оценивать сверху дроби. При этом будем использовать следующий известный факт:

$$\text{если}\quad 0 \leqslant a \leqslant c \quad\text{и}\quad b \geqslant d > 0, \quad\text{то}\quad \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}. \tag{1}$$

Пример 1. Доказать ограниченность последовательности

$$a_n = \frac{1 + 4\sin n}{\cos n - 3},$$

т. е. найти такое C, что $|a_n| \leqslant C$ при всех n из $\mathbb{N}$.

Решение. Заметим, что

$$|1 + 4\sin n| \leqslant 1 + 4|\sin n| \leqslant 5, \qquad |\cos n - 3| = 3 - \cos n \geqslant 2.$$

Отсюда $|a_n| \leqslant \dfrac{5}{2}$.

Пример 2. Доказать ограниченность последовательности

$$a_n = 3 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2},$$

т. е. найти такое $C > 0$, что $|a_n| \leqslant C$ при всех n из $\mathbb{N}$.

Решение. Используем неравенство $|x + y + z| \leqslant |x| + |y| + |z|$ и условие $n \geqslant 1$:

$$|a_n| \leqslant 3 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \leqslant 3 + 5 + 3 = 11.$$

Упр. 1. Показать, что в неравенстве (1) нельзя отбросить условия $a \geqslant 0$ и $d > 0$. Другими словами, нужно показать на примерах, что без этих условий неравенство (1) может не выполняться. Формально: найти такие числа a, b, c, d, что $a \leqslant c$, $b \geqslant d$ и

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

Упр. 2. Доказать ограниченность последовательности

$$a_n = \frac{3 - 5\sin n}{5 - 2\cos n},$$

т. е. найти такое $C > 0$, что $|a_n| \leqslant C$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Упр. 3. Доказать ограниченность последовательности

$$a_n = 3 + \frac{2}{n} - \frac{30}{n^2}.$$

Отграниченность от нуля

Пример 3. Пусть $a_n = 2 - \dfrac{7}{n}$. Найти такие $C > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n| \geqslant C$ при $n > N$ («отграничить от нуля»).

Решение. Начнём с неформального рассуждения. Заметим, что a_n стремится к 2, причём слева. Это значит, что при больших n величина a_n близка к 2, но меньше 2. Поэтому C нужно брать **меньше** 2 (но больше нуля). Например, возьмём $C = 1$. Чтобы получить $a_n > 1$, достаточно сделать $\dfrac{7}{n} < 1$. Так будет при $n > 7$. Значит, возьмём $N = 7$.

Формальная запись. При $n > 7$ получим $\dfrac{7}{n} < 1$, отсюда $-\dfrac{7}{n} > -1$ и

$$a_n = 2 \underbrace{-\frac{7}{n}}_{>-1} > 1.$$

Пример 4. Пусть $a_n = 1 - \dfrac{5}{n} - \dfrac{20}{n^2}$. Найти такие $C > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n| \geqslant C$ при $n > N$.

Решение. Заметим, что a_n стремится к 1, причём слева. Поэтому C нужно брать меньше 1. Например, можно взять $C = \frac{1}{2}$. Чтобы получить $a_n > \frac{1}{2}$, достаточно сделать каждое из двух вычитаемых меньше, чем $\frac{1}{4}$. Неравенство $\frac{5}{n} < \frac{1}{4}$ будет выполняться при $n > 20$, а неравенство $\frac{20}{n^2} < \frac{1}{4}$ будет выполняться при $n^2 > 80$, т. е. при $n > 8$. Чтобы выполнялись все эти неравенства, приходится брать $n > 20$. Итак, $N = 20$, $C = \frac{1}{2}$.

Формальная запись. При $n > 20$ будет $\frac{20}{n^2} < \frac{20}{400} = \frac{1}{20} < \frac{1}{4}$, $\frac{5}{n} < \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$,

$$a_n = 1 - \frac{5}{n} - \frac{20}{n^2} > 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Упр. 4. Отграничить от нуля последовательность

$$a_n = 1 - \frac{5}{n},$$

т. е. найти такое $C > 0$ и такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > C$.

Упр. 5. Отграничить от нуля последовательность

$$a_n = 3 - \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}.$$