

Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр 2-е занятие. Графики функций. Факториал

341] Применяя правило умножения графиков, построить график функции $y = x \sin x$.

340а] Построить график функции $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

A1] Найти функцию, обратную к $\operatorname{ch} x$ при $x > 0$.

Построить графики функций $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат:

371а] $\rho = \varphi$ (спираль Архимеда).

371д] $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида).

371ж] $\rho^2 = 36 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

371и] $\varphi = 2\pi \sin \rho$.

A2] Для функции $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ найти перечисленные образы и прообразы множеств:

$$\text{a) } f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right); \quad \text{b) } f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right); \quad \text{c) } f^{-1}(1/2); \quad \text{d) } f^{-1}\left(\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right).$$

Факториал

Определение факториала: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Рекурсивная формула: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

A3] Упростить выражения: $\frac{(n+1)!}{n!}$, $\frac{n!}{(n-1)!}$, $\frac{n!}{(n+2)!}$, $\frac{(n+1)!}{(n-3)!}$.

A4] Чему должен быть равен $0!$, чтобы равенство $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ выполнялось и при $n = 0$?

A5] Выразить следующие произведения через факториалы:

а) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; б) $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$; в) $k \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot n$, где $k < n$;
д) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k)$, где $k < n$.

Определение: $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots$ Примеры: $6!!$, $5!!$.

A6] Выразить $(2k)!!$ через обычный факториал.

Домашнее задание № 2

Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

342] Применяя правило умножения графиков, построить график функции $y = x \cos x$.

340бв] Построить графики функций $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

A1] Найти функции, обратные к $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{th} x$.

371бгез] Построить графики функций $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат (ρ, φ) :

б) $\rho = \frac{\pi}{\varphi} \quad (0 \leq \varphi < +\infty)$;

г) $\rho = 2^{\varphi/2\pi}$ (логарифмическая спираль);

е) $\rho = 10 \sin 3\varphi$ (трёхлепестковая роза);

з) $\varphi = \frac{\rho}{\rho - 1} \quad (\rho > 1)$.

A2] Для функции $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ найти перечисленные образы и прообразы множеств:

а) $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$; б) $f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)$; в) $f^{-1}(1/2)$; г) $f^{-1}\left(\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$.

Факториалы

A3] Выразить следующие произведения через факториалы:

а) $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$;

б) $k \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k)$, где $k \in \mathbb{N}$;

в) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$, где $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

A4] Выразить $(2k+1)!!$ через обычные факториалы.

Биномиальные коэффициенты C_n^k определяются формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

A5] Найти C_n^1 , C_n^2 , C_n^3 , C_n^0 .

A6] Доказать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

A7] Доказать, что $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.