Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр
3-е занятие. Биномиальные коэффициенты. Математическая индукция

Формула для биномиальных коэффициентов: $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}.}$

$\boxed{\text{A1}}$ Найти C_n^1, C_n^2, C_n^3, C_n^0, C_n^n.

$\boxed{\text{A2}}$ С помощью формулы $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ построить треугольник Паскаля до $n = 6$.

$\boxed{\text{A3}}$ Возвести в степень: $(x+y)^5$, $(x-2y)^4$.

$\boxed{\text{A4}}$ Найти:
a) средний член разложения $(2x^3 - 3y)^4$;
b) коэффициент при x^4y^5 в $(3x^2 - 5y)^7$.

$\boxed{\text{A5}}$ Задачка на сообразительность: найти сумму коэффициентов в разложении $(x+2y)^4$.

Метод математической индукции

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

$\boxed{4}$ $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$

$\boxed{1}$ $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

$\boxed{3}$ $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$

$\boxed{\text{10.1a}}$ Доказать неравенство: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geqslant 2).$

$\boxed{\text{A6}}$ Пусть $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Найти $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\ \text{раз}}$ при $n = 2$ и $n = 3$, угадать общую формулу и доказать её методом матем. индукции.

$\boxed{\text{A7}}$ С помощью неравенства Бернулли доказать, что $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > 2$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Методом матем. индукции доказать следующие неравенства:

$\boxed{8}$ $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$. $\boxed{\text{A8}}$ $C_{2n}^n < \dfrac{4^n}{\sqrt{2n+1}}.$

Домашнее задание № 3
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Возвести в степень: $(2x-3y^2)^4$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти:

a) два средних члена разложения $(3x^2-y)^5$.

b) коэффициент при x^4y^6 в $(x^2-2y^3)^4$.

$\boxed{\text{A3}}$ Найти сумму коэффициентов в разложениях следующих степеней: a) $(x+y)^n$; b) $(x-y)^n$; c) $(2x+3y)^4$.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

$\boxed{2}$ $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$\boxed{\text{A4}}$ $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (q\neq 1)$.

$\boxed{\text{A5}}$ Вычислить сумму $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ при $n=1,2,3,4$, угадать общую формулу и доказать её методом матем. индукции.

$\boxed{210}$ Пусть $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Найти $f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\ \text{раз}}$ при $n=2$ и $n=3$, угадать общую формулу и доказать её методом матем. индукции.

$\boxed{6}$ Доказать нестрогое неравенство Бернулли для произведения:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

где $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — числа одного и того же знака, бóльшие -1.

Доказать следующие неравенства методом математической индукции:

$\boxed{9}$ $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>((n+1)!)^n \qquad$ при $\qquad n>1$.

$\boxed{10}$ $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

$\boxed{\text{10.1бвг}}$ Доказать неравенства методом мат. индукции:

б) $n^{n+1}>(n+1)^n \qquad (n\geqslant 3)$.

в) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k \quad (0\leqslant x_k\leqslant\pi,\ k=1,2,\ldots,n)$.

г) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$.