Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр
4-е занятие. Ограниченные последовательности

$\boxed{\text{A1}}$ Найти сумму коэффициентов разложения $(3a^2 - b)^4$ и средний член разложения.

$\boxed{96}$ Найти наибольший член последовательности $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

При доказательстве неравенств часто используют следующие важные свойства абсолютной величины:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \qquad |a - b| \geqslant ||a| - |b||.$$

Доказать ограниченность следующих последовательностей:

$\boxed{\text{A2}}$ $x_n = 3 + \sin n$.

$\boxed{\text{A3}}$ $x_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n + (-1)^n}{5 - 2\cos n}$.

$\boxed{\text{A4}}$ $x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$.

$\boxed{\text{A5}}$ $x_n = \dfrac{n^2 - 5n + 7}{n^2}$.

$\boxed{\text{A6}}$ $x_n = \dfrac{3n + 2}{n^2 - 3n - 1}$.

$\boxed{\text{A7}}$ $x_n = \dfrac{n^3}{3^n}$.

$\boxed{\text{A8}}$ $x_n = \dfrac{3}{3} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{9}{27} + \ldots + \dfrac{2^n + 1}{3^n}$.

Для следующих последовательностей x_n $(n \in \mathbb{N})$ найти $\sup x_n$ и $\inf x_n$ (супремум и инфимум):

$\boxed{101.1}$ $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$.

$\boxed{103}$ $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

$\boxed{106}$ $x_n = (-1)^n n$.

Домашнее задание № 4
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать неравенства:

a) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, b) $|a| \leqslant c \iff -c \leqslant a \leqslant c$;
c) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, d) $|a-b| \leqslant |a|+|b|$,
e) $|a-b| \geqslant ||a|-|b||$, f) $|a+b| \geqslant ||a|-|b||$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти сумму коэффициентов разложения $(3x^2-2y^3)^5$ и два средних члена разложения.

$\boxed{\text{A3}}$ Вычислить значения последовательности

$$x_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!$$

при $n = 1, 2, 3, 4$, угадать общую формулу и доказать её методом математической индукции.

$\boxed{98}$ Найти наибольший член последовательности $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

$\boxed{100}$ Найти наименьший член последовательности $x_n = n + \dfrac{100}{n}$.

Доказать ограниченность следующих последовательностей (найти такое $C > 0$, что $|x_n| \leqslant C$ при любом $n \in \mathbb{N}$):

$\boxed{\text{A4}}$ $x_n = (-1)^n \cdot (3+\cos n)$. $\boxed{\text{A5}}$ $x_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sin n - 7}$.

$\boxed{\text{A6}}$ $x_n = \dfrac{2n^2-10n+5}{3n^2}$. $\boxed{\text{A7}}$ $x_n = \dfrac{n^2-3n+1}{2n^2-5n+1}$.

$\boxed{\text{A8}}$ $x_n = \dfrac{n^3}{2^n}$. $\boxed{\text{A9}}$ $x_n = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

Для следующих последовательностей x_n ($n \in \mathbb{N}$) найти $\sup x_n$ и $\inf x_n$:

$\boxed{101}$ $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. $\boxed{102}$ $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

$\boxed{107}$ $x_n = -n\left(2+(-1)^n\right)$. $\boxed{104}$ $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$\boxed{\text{A10}}$ (Необязательное задание.) Доказать формулу $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^{k} = C_{m+n+1}^{n}$.

Перед доказательством проверить эту формулу с помощью треугольника Паскаля, считая $n = 3$ и $m = 3$, а затем $n = 4$ и $m = 3$. Математическую индукцию проводить по n, считая m фиксированным.