Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр
5-е занятие. Предел последовательности

Для следующих последовательностей x_n ($n \in \mathbb{N}$) найти $\sup x_n$ и $\inf x_n$:

$\boxed{\text{A1}}$ $x_n = 1 + \dfrac{2}{n}$.

$\boxed{101.1}$ $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$.

Определение предела

Пользуясь определением предела, доказать следующие предельные соотношения:

$\boxed{\text{A2}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5n}{n^2} = 3$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-n^3}{2n^3+3n^2} = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{A4}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{n^2-7n} = 0$.

$\boxed{\text{A5}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0, \quad \text{где} \quad |a| < 1$.

$\boxed{\text{A6}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-n}) = 2$.

$\boxed{\text{A7}}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n = \cos a$.

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов:

$\boxed{\text{A8}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+5}{3n^2-7n-8}$.

$\boxed{\text{A9}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (1+q+q^2+\ldots+q^n), \quad \text{где} \quad |q| < 1$.

$\boxed{53}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

Домашнее задание № 5
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Для следующих последовательностей x_n $(n \in \mathbb{N})$ найти $\sup x_n$ и $\inf x_n$:

$\boxed{101}$ $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. $\boxed{102}$ $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

Определение предела

$\boxed{41}$ Пусть $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Построить таблицу зависимости $N(\varepsilon)$ от ε, подставляя $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001$.

$\boxed{42}$ Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, указав для всякого $\varepsilon > 0$ такое число $N = N(\varepsilon)$, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$:

а) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1} = 0$;

в) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; г) $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$.

$\boxed{46}$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^2+1}$. Построить таблицу, как в задаче 41.

Пользуясь определением предела, доказать следующие равенства:

$\boxed{58}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$. $\boxed{59}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = \sin a$.

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \geqslant 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$. (Указание: рассмотреть отдельно случаи $a = 0$ и $a > 0$.)

Найти пределы, используя формулы суммирования и арифметические свойства предела:

$\boxed{50}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$ $(|a| < 1,\ |b| < 1)$.

$\boxed{51}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.