

**Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр**  
**6-е занятие. Предел последовательности**

**A1** Пусть  $x_n \geq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$ . (Указание: рассмотреть отдельно случаи  $a = 0$  и  $a > 0$ .)

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов, а затем провести доказательство с помощью определения предела (по любому заданному  $\varepsilon > 0$  найти  $N$ ):

**A2**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 - 3n - 7}$ .

**A3**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 2^n}{4 \cdot 3^n - 7}$ .

**A4**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - n^2}{2n - 3}$ .

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов:

**A5**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + n^2 + 1}$ .

**53**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$ .

**67 а** Какое выражение больше при достаточно больших  $n$ :  
а)  $100n + 200$  или  $0,01n^2$ ?

**A6** Доказать, что  $n(1 + (-1)^n) \not\rightarrow \infty$ .

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов:

**A7**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3^n}{4 \cdot 3^n + n^3}$ .

**A8**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot 5^n - 2 \cdot 3^{2n}}{3^n + n^2}$ .

**A9**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + 3n}}$ .

**A10**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^3 - 1 \right)$ .

## Домашнее задание № 6

### Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов, а затем провести доказательство с помощью определения предела (по любому заданному  $\varepsilon > 0$  найти  $N$ ):

$$\boxed{\text{A1}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n - 2}{n^2 - 2n - 5}. \quad \boxed{\text{A2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n}{n^3 - 4n + 1}. \quad \boxed{\text{A3}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{3^n}.$$

$\boxed{67 \text{ бв}}$  Выяснить, какое выражение больше при достаточно больших  $n$ :

$$\text{б) } 2^n \text{ или } n^{1000}; \quad \text{в) } 1000^n \text{ или } n!.$$

Доказать, используя определение предела:

$$\boxed{\text{A4}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2 \cdot 3^n + n^2} = -\frac{1}{2}. \quad \boxed{\text{A5}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^{2n} - 5n}{3 \cdot 2^n - 5 \cdot 9^n} = -\frac{4}{5}.$$

Вычислить пределы:

$$\boxed{\text{A6}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n+3)(n-4)}{n^3 - 3n + 5}. \quad \boxed{\text{A7}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - n \cdot 2^n}{4^n - n^2 \cdot 3^n}.$$

$$\boxed{\text{A8}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \left( a + \frac{1}{n} \right)^2 + \left( a + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right).$$

(Подсказка: раскрыть скобки, разбить слагаемые на три группы и воспользоваться формулами суммирования.)

$$\boxed{\text{A9}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right). \quad \boxed{\text{A10}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

$$\boxed{\text{A11}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \left( \sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 3n - 1} \right) \right).$$

$\boxed{\text{A12}}$  Методом матем. индукции доказать, что  $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Вывести отсюда, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .

$\boxed{\text{A13}}$  На языке  $E - N$  написать определения:

а)  $x_n \not\rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ;    б)  $x_n \not\rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

$\boxed{\text{A14}}$  Доказать, что  $n^{(-1)^n} \not\rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

$\boxed{\text{A15}}$  Для последовательности  $x_n = (-1)^n \cdot n$  доказать, что  $x_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , но  $x_n \not\rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .