Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр
7-е занятие. Вычисление пределов. Частичные пределы

$\boxed{75а}$ Доказать неравенство $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

Вычислить пределы, используя арифметические свойства пределов:

$\boxed{\text{A1}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-3n}}{n^2}$. $\boxed{\text{A2}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}-\sqrt[3]{n^3+4n^2}}$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$. $\boxed{\text{A4}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\cdot 7^n+7\cdot 5^{2n}}{n^2-10^n}$.

$\boxed{\text{A5}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n!-(n+1)!)}{(n+1)!+(n+2)!}$. $\boxed{\text{A6}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2-3n\sin n)}{1+\ln(n+1)}$.

$\boxed{\text{A7}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (2+\cos n)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. $\boxed{\text{A8}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln n\cdot(2+(-1)^n))$.

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

$\boxed{80}$ $x_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$. (Использовать 75а.)

$\boxed{\text{A9}}$ $x_1=\sqrt{1},\quad x_2=\sqrt{1+\sqrt{1}},\quad x_3=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\quad \ldots,$
$x_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}$.

$\boxed{\text{T1}}$ Пусть $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и $g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — возрастающие последовательности натуральных чисел, $E(f)\cap E(g)=\varnothing$ и $E(f)\cup E(g)=\mathbb{N}$. Тогда будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *разбивается* на подпоследовательности $y_k=x_{f(k)}$ и $z_k=x_{g(k)}$. Предположим, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=A$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=B$. Доказать, что $\operatorname*{LIM}\limits_{n\to\infty} x_n=\{A,B\}$.

Для последовательности x_n найти множество частичных пределов, а также inf, sup, $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$.

$\boxed{116}$ $\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{1}{2},\quad \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{3}{4},\quad \dfrac{1}{8},\quad \dfrac{7}{8},\quad \ldots,\quad \dfrac{1}{2^n},\quad \dfrac{2^n-1}{2^n},\quad \ldots.$

$\boxed{103}$ $x_n = 1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$. $\boxed{107}$ $x_n=-n\,(2+(-1)^n)$.

Домашнее задание № 7
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Упражнения, отмеченные буквой К, взяты из задачника
Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по матем. анализу. Том 1.

$\boxed{\text{К36}}$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \dfrac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$; 2) $x_n = \dfrac{5\cdot 2^n - 3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n + 2\cdot 5^n}$;

4) $x_n = \dfrac{(-1)^n\cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$; 5) $x_n = \dfrac{a^n}{1+a^n}$, $a \neq -1$.

$\boxed{\text{К39}}$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

3) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}$; 6) $x_n = \dfrac{\lg^2(10n)}{\lg^2 n}$; 7) $x_n = \dfrac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$.

$\boxed{\text{К43}}$ Пусть $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. (Подсказка: $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.)

$\boxed{\text{К44, 1)}}$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

$\boxed{78}$ $x_n = \dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n+9}{2n-1}$.

$\boxed{79}$ $x_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

$\boxed{81}$ $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\ldots$, $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$.

Для последовательности x_n найти множество частичных пределов, а также inf, sup, $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$:

$\boxed{109}$ $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$. $\boxed{119}$ $x_n = 3\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$.

$\boxed{120}$ $x_n = \dfrac{1}{2}\left((a+b) + (-1)^n(a-b)\right)$. $\boxed{111}$ $x_n = \dfrac{n^2}{1+n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.