

**Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр**  
**8-е занятие (предел последовательности, повторение)**

Доказать сходимость и найти пределы следующих последовательностей:

$$\boxed{\text{A1}} \quad x_1 = \sqrt{1}, \quad x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \quad x_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \quad \dots,$$
$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}.$$

$$\boxed{\text{A2}} \quad x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

$$\boxed{\text{K43 (из Д. 3.)}} \quad \text{Пусть } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

$$\boxed{\text{A3}} \quad \text{Найти слагаемое, содержащее } a^{10}, \text{ в разложении } (a^3 - ba)^6.$$

$$\boxed{\text{A4}} \quad \text{Доказать, пользуясь определением предела: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^2}{n - 15} = -\infty.$$

Для последовательности  $x_n$  найти множество частичных пределов, а также  $\inf$ ,  $\sup$ ,  $\underline{\lim}$  и  $\overline{\lim}$ .

$$\boxed{\text{A5}} \quad x_n = (-1)^n \left( 3 - \frac{1}{n} \right).$$

$$\boxed{\text{A6}} \quad x_n = 1 + n \cos \frac{n\pi}{2}.$$

Вычислить пределы:

$$\boxed{\text{A7}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 \cdot \sin \frac{1}{n^3} \right).$$

$$\boxed{\text{A8}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{n}{n+1} - \cos \frac{n-1}{n} \right).$$

$$\boxed{\text{A9}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sin \frac{1}{n}}.$$

$$\boxed{\text{A10}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \cdot \sin n}{n}.$$

$$\boxed{\text{A11}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n(\cos n + 2)}.$$

$$\boxed{\text{A12}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{3n}.$$

## Домашнее задание № 8

### Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Упражнения, отмеченные буквой К, взяты из задачника  
Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по матем. анализу. Том 1.

Найти пределы:

$$\boxed{\text{A1}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n+3} \right).$$

$$\boxed{\text{A2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) \left( (-1)^n - \frac{1}{n} \right).$$

Доказать сходимость следующих последовательностей и найти пределы:

$$\boxed{\text{A3}} \quad x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!}. \quad \boxed{\text{A4}} \quad x_1 = \sqrt{12}, \quad x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}.$$

$$\boxed{\text{A5}} \quad \text{Найти } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \text{ если}$$

$$x_n = \left( 1 - \frac{2}{2 \cdot 3} \right) \left( 1 - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right).$$

(Указание: сначала найти простую формулу для  $x_n$ .)

Найти пределы:

$$\boxed{\text{K66, 1}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \lg n}{n^2 - 1}. \quad \boxed{\text{K66, 5}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \lg n}{\log_2(4^n + 1)}.$$

$$\boxed{\text{K68, 4}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + n^2 \cdot 2^n - 1}{n^4 + (n!)^2}. \quad \boxed{\text{K68, 7}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n/2} + (n+1)!}{n(3^n + n!)}.$$

Для следующих последовательностей найти множество частичных пределов, а также  $\overline{\lim}$ ,  $\underline{\lim}$ ,  $\sup$  и  $\inf$ :

$$\boxed{\text{K113, 1}} \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}. \quad \boxed{\text{K113, 5}} \quad x_n = 3^{(-1)^{nn}}.$$

$$\boxed{\text{K116, 3}} \quad x_n = \left( 1, 5 \cos \frac{2\pi n}{3} \right)^n.$$

$$\boxed{\text{K117, 4}} \quad x_n = \frac{((-1)^n - 1)n^2 + n + 1}{n}.$$

$$\boxed{\text{K117, 5}} \quad x_n = \frac{(1 + \cos \pi n)n + \lg n}{\lg 2n}.$$

$$\boxed{\text{K123, 4}} \quad x_n = \frac{1}{n} + \sin \frac{\pi n}{3}. \quad \boxed{\text{K123, 6}} \quad x_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 2}.$$