

Мех.-мат., матем. анализ., 1-й семестр
10-е занятие. Определение предела функции.
Пределы рациональных выражений

$$\boxed{\text{(повтор.)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}. \quad \boxed{\text{(повтор.)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(10^n + \sin n)}{n + \ln n}.$$

Доказать, пользуясь определением предела функции:

$$\boxed{\text{A1}} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1) = 10.$$

$$\boxed{\text{A2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{2x^2 - x - 1} = -3.$$

$\boxed{\text{A3}}$ Сформулировать определения и привести примеры:

$$\lim_{x \rightarrow -7} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, что если $B > 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, то существует такое $\delta > 0$, что $f(x) > B/2$ при $x \in \dot{U}_\delta(a) \cap D(f)$.

Найти пределы:

$$\boxed{\text{A5}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20} (3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}.$$

$$\boxed{412} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x}.$$

$\boxed{411}$ Найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$\boxed{\text{A6}}$ Разделить с остатком $f(x)$ на $(x - a)$ (разобрать два способа деления: уголком и с помощью схемы Горнера):

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x + 1, \quad a = 2.$$

$$\boxed{\text{A7}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 + 3x + 2}. \quad \boxed{\text{A8}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$\boxed{425} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \text{ где } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\boxed{414} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}, \text{ где } m, n \in \mathbb{N}.$$

Домашнее задание № 10

Матем. анализ, мех.-мат., 1-й семестр

Пользуясь определением предела функции, доказать следующие соотношения. Найти δ для $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001$.

$$\boxed{\text{A1}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 + x^2} = 0. \quad \boxed{\text{A2}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{1}{x} \right) = 2. \quad \boxed{401} \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

$\boxed{402}$ С помощью определения предела доказать, что $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Найти δ для $E = 10; 100; 1000; 10000$.

$\boxed{406}$ Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения и привести соответствующие примеры:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B,$$

где $a = \infty; +\infty; -\infty; B = \infty; +\infty; -\infty$ (9 случаев).

$\boxed{\text{A3}}$ Доказать, что если $B < 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, то существует такое $\delta > 0$, что $f(x) < B/2$ при $x \in \dot{U}_\delta(a) \cap D(f)$.

$$\boxed{413} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$\boxed{415} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$$

$$\boxed{418} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}.$$

$$\boxed{419} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$$

$$\boxed{420} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}.$$

$$\boxed{421} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}.$$

$$\boxed{424} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

$$\boxed{426} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}, \text{ где } a \in \mathbb{R} \text{ и } n \in \mathbb{N}.$$