

Мех.-мат., матем. анализ., 1-й семестр  
 12-е занятие. Использование эквивалентностей.  
 Замечательные пределы

481 а) Доказать:  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ .      475 (из Д. 3.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ .

Определение  $f \stackrel{a}{\sim} g$ .

T1 Пусть  $g(x) \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $a$  и  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow a$ . Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot h(x).$$

475 (через  $\sim$ )  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ .

477  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ .      A1  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ .

480  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .      A2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ .

483  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ .      485  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}$ .

Второй замечательный предел и некоторые следствия из него

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ .       $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .       $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

A3  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$ .      A4  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$ .

A5 Пусть  $f(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow a$ . Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1)}.$$

506 Найти предел функции  $f(x) = \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$  при:

а)  $x \rightarrow 0$ ; б)  $x \rightarrow 1$ ; в)  $x \rightarrow +\infty$ .

507  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$ .      518  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$ .

## Домашнее задание № 12

### Матем. анализ, мех.-мат., 1-й семестр

$$\boxed{481\text{б}} \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a; \quad \boxed{481\text{в}} \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \quad (a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\boxed{474.2} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x. \quad \boxed{477} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$\boxed{482} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}. \quad \boxed{484} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} \quad (a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\boxed{489} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a + 2x) - 2 \cos(a + x) + \cos a}{x^2}.$$

$$\boxed{495} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}. \quad \boxed{A1} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}. \quad (\text{Ответ: } 1/4.)$$

$$\boxed{501} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}. \quad \boxed{503} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$\boxed{505} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

### Второй замечательный предел

$$\boxed{508} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}. \quad \boxed{511} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$\boxed{514} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}. \quad \boxed{517} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$\boxed{519} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{1/\sin x}. \quad \boxed{519.1} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{1/\sin^2 x}.$$

### Повторение

$$\boxed{A2} \text{ Пользуясь определением, доказать, что } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x + 4x^2}{4 - x} = \frac{1}{2}.$$

Повторить вывод следствий из второго замечательного предела!