Мех.-мат., матем. анализ., 1-й семестр
13-е занятие. Применения II замечательного предела

Если $f(x) \to 1$ при $x \to x_0$, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}.}$$

A1 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

A2 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 4x}}$.

A3 $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos 2x}$.

520 $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

522 $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

525 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

При $t \to 0$: $\boxed{\ln(1+t) \sim t}$ $\boxed{\log_a(1+t) \sim \frac{t}{\ln a}}$

$\boxed{e^t - 1 \sim t}$ $\boxed{a^t - 1 \sim t\ln a}$ $\boxed{(1+t)^\mu - 1 \sim \mu t}$

A4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$.

A5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{\ln(1+4x)}$.

A6 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\operatorname{tg} x}$.

A7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x} - 1}{(1+3x)^7 - 1}$.

A8 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[6]{\cos 4x} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}$.

452 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

561 а) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

(Самостоятельная работа.)

Домашнее задание № 13
Матем. анализ, мех.-мат., 1-й семестр

$\boxed{455}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$.

$\boxed{521}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$. $\boxed{523}$ $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

$\boxed{524}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$. $\boxed{526}$ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

$\boxed{527}$ $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$. $\boxed{528}$ $\lim\limits_{n\to \infty} \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

$\boxed{529}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. $\boxed{530}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

$\boxed{531}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

$\boxed{532}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin(\ln(x+1))-\sin(\ln x))$.

$\boxed{535}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$. $\boxed{539}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

$\boxed{549}$ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}$ $(a>0)$. Указание: вынести за скобку a^{x_0}.

$\boxed{548}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$.

$\boxed{544}$ $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{1/x}$.

$\boxed{562}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

$\boxed{\text{A1}}$ Пользуясь определениями ($\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$), доказать основное гиперболическое тождество ($\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$), исследовать функции $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ на чётность-нечётность, вывести формулы для следующих выражений:

$$\operatorname{ch}(x+y), \qquad \operatorname{sh}(x+y), \qquad \operatorname{ch} 2x, \qquad \operatorname{sh} 2x.$$

Нарисовать графики функций $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{th} x$. Доказать, что $\operatorname{ch} x \sim \frac{1}{2}e^x$ при $x\to+\infty$.