6-е занятие. Интегрирование иррациональных функций Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Для интегрирования квадратичных иррациональностей полезно знать следующие формулы:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0).$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \qquad (a > 0).$$

$\boxed{1937}$ $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$. (Разбить в сумму табличных интегралов.)

Найти интеграл из задачи 1937, применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\, dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

где $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n, $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$ и λ — число.

$\boxed{1947}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 + 1}}$. (С помощью замены привести к виду $\int \frac{P(t)\, dt}{\sqrt{at^2+bt+c}}$.)

В более сложных случаях интегралы от иррациональных функций с помощью подходящей замены сводят к интегралах от рациональных функций.

Для интегрирования функции вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ можно использовать подстановки Эйлера:

- $a > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x$;
- $c > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$;
- $D > 0$: $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)$.

$\boxed{A1}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$. $\boxed{A2}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 4} + 2}$.

$\boxed{A3}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$.

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ находят с помощью замены $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

$\boxed{A4}$ $\displaystyle\int \frac{dx\sqrt{x}}{(x - 1)\sqrt{x + 1}}$.

Домашнее задание № 6
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Найти интегралы с помощью замен вида $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$:

$\boxed{1932}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. $\boxed{1933}$ $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a > 0)$.

$\boxed{1935}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$. Указание: $x = \left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$.

Найти интегралы от следующих квадратичных иррациональностей:

$\boxed{1938}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

$\boxed{1941}$ $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

$\boxed{1942}$ $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

где $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n, $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ и λ — число, найти следующие интегралы:

$\boxed{1943}$ $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

$\boxed{1950}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$. Подсказка: начать с замены $t = \dfrac{1}{x+1}$.

Найти интегралы с помощью подстановок Эйлера:

$\boxed{1966}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

$\boxed{1967}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

$\boxed{1968}$ $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

$\boxed{1969}$ $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$.