10-е занятие. Площадь фигуры
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

$\boxed{2212}$ $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах:

$\boxed{2400.2}$ $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

$\boxed{\text{A1}}$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x = L$, где $-a < L < a$ (левая часть).

$\boxed{\text{A2}}$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \pm L$, где $L > 0$.

$\boxed{2396}$ Доказать, что площадь прямого параболического сегмента равна $S = \dfrac{2}{3}bh$, где b — основание и h — высота сегмента.

Площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой, заданной в параметрическом виде ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$):

$$\boxed{S = -\int\limits_0^T y(t)x'(t)\,dt = \int\limits_0^T x(t)y'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt.}$$

$\boxed{2413}$ Циклоида: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $y = 0$.

Площадь сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.}$$

$\boxed{2418}$ $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската).

$\boxed{2420}$ $r = a \sin 3\varphi$ (трилистник).

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

$\boxed{2427}$ $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

$\boxed{2428}$ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Домашнее задание № 10
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах:

$\boxed{2401}$ $y = x$, $y = x + \sin^3 x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

Указание к 2401: отдельно вывести формулу понижения для $\sin^3 x$.

$\boxed{2402}$ $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = 0$.

$\boxed{2405}$ $y^2 = 2px$, $27py^2 = 8(x - p)^3$.

$\boxed{2407}$ $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (циссоида), $x = 2a$.

$\boxed{2410}$ $y = e^{-x}|\sin x|$, $y = 0 \quad (x \geqslant 0)$.

$\boxed{\text{A1}}$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x = L$, где $L > b$.

$\boxed{\text{A2}}$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = L$ (верхняя часть).

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

$\boxed{2414}$ $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

$\boxed{2415}$ $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (развёртка круга) и $x = a$, $y \leqslant 0$.

Записать уравнение кривой в параметрическом виде и найти площадь фигуры, ограниченной этой кривой:

$\boxed{2429}$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида). Указание. $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

$\boxed{2419}$ $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида).

$\boxed{2422}$ $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ (эллипс).

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигуры, ограниченной кривой:

$\boxed{2426}$ $x^3 + y^3 = 3axy$ (лист Декарта).