11-е занятие. Площадь фигуры в полярных координатах. Длина кривой
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.}$$

$\boxed{2418}$ $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската).

$\boxed{2420}$ $r = a\sin 3\varphi$ (трилистник).

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

$\boxed{2427}$ $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

$\boxed{2428}$ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Длина кривой

Длина дуги кривой, заданной параметрически:

$$\boxed{\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.}$$

$\boxed{2443}$ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

$\boxed{2440}$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида).

$\boxed{\ell = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx}$ — длина дуги в прямоугольных координатах.

$\boxed{2433}$ $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ от $A(0; a)$ до $B(b; h)$.

$\boxed{\ell = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi}$ — длина дуги в полярных координатах.

$\boxed{2448}$ $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Домашнее задание № 11
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Записать уравнение кривой в параметрическом виде и найти площадь фигуры, ограниченной этой кривой:

$\boxed{2429}$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида). Указание. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

$\boxed{2419}$ $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида).

$\boxed{2422}$ $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ (эллипс).

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигуры, ограниченной кривой:

$\boxed{2426}$ $x^3 + y^3 = 3axy$ (лист Декарта).

Найти площади фигур, ограниченных линиями (делать рисунки):

$\boxed{2428}$ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. (перейти к полярным координатам, найти пределы изменения φ).

$\boxed{2421}$ $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$ (парабола), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{2422}$ $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ (эллипс).

$\boxed{2422.1}$ $r = 3 + 2\cos\varphi$.

Найти длины дуг следующих кривых:

$\boxed{2442}$ $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

$\boxed{2444}$ $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (развёртка окружности).

$\boxed{2431}$ $y = x^{3/2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

$\boxed{2446}$ $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда) при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

$\boxed{2450}$ $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.