17-е занятие. Частные производные сложных функций Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$. Вывести формулы для вторых частных производных сложной функции:

$$
\begin{aligned}
g''_{xx} &= f''_{uu} \cdot (u'_x)^2 + 2f''_{uv} \cdot u'_x v'_x + f''_{vv} \cdot (v'_x)^2 + f'_u \cdot u''_{xx} + f'_v \cdot v''_{xx};\\
g''_{xy} &= f''_{uu} \cdot u'_x u'_y + f''_{uv} \cdot (u'_x v'_y + u'_y v'_x) + f''_{vv} \cdot v'_x v'_y + f'_u \cdot u''_{xy} + f'_v \cdot v''_{xy};\\
g''_{yy} &= f''_{uu} \cdot (u'_y)^2 + 2f''_{uv} \cdot u'_y v'_y + f''_{vv} \cdot (v'_y)^2 + f'_u \cdot u''_{yy} + f'_v \cdot v''_{yy}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{К 3.29}}$ Для функции $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ найти вторые частные производные, если:

1) $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$;

2) $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$;

3) $u = x \cos y$, $v = x \sin y$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти первые и вторые частные производные от следующей сложной функции (предполагается, что внешняя функция f дважды непрерывно дифференцируема):

$$u(x, y) = f(e^{2x} \operatorname{ctg} y, \cos y).$$

Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующие равенства:

$\boxed{3318}$ $y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz$, если $z(x, y) = y\varphi(x^2 - y^2)$.

$\boxed{3321}$ $y \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

$\boxed{3326}$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

Дифференцирование неявных функций (случай функций от одной переменной)

Найти y' и y'' для функций y, определяемых следующими уравнениями:

$\boxed{\text{A3}}$ $x^2 + y^2 = a^2$.

$\boxed{3371}$ $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

$\boxed{3373}$ $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

Домашнее задание № 17
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Найти производные первого и второго порядков от сложных функций, предполагая, что функция f дифференцируема нужное число раз:

$\boxed{3284}$ $g(x,y) = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$.

$\boxed{3285}$ $g(x,y,z) = f(x, xy, xyz)$.

$\boxed{3286}$ Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $g(x,y) = f(x+y, xy)$.

$\boxed{3287}$ Найти $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$.

$\boxed{3308}$ Доказать, что если функция $u = u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

то функция $v(x,y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующие равенства:

$\boxed{3322}$ $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, если $z(x,y) = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

$\boxed{3323}$ $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, если $z(x,y) = e^y \varphi\left(ye^{x^2/2y^2}\right)$.

$\boxed{3324}$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu$, если $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$.

$\boxed{3327}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Дифференцирование функций, заданных неявно (случай функции от одной переменной)

Найти y' и y'' для функций y, определяемых следующими уравнениями:

$\boxed{3372}$ $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

$\boxed{3374}$ $x^y = y^x \quad (x \neq y)$.

$\boxed{3375}$ $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.