20-е занятие. Замена переменных
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Замена переменных в обыкновенных диф. уравнениях

Вводя новые переменные, преобразовать следующие дифференциальные уравнения:

$\boxed{3434}$ $x^2y'' + xy' + y = 0$, если $x = e^t$.

$\boxed{3440}$ $(1+x^2)^2y'' = y$, если $x = \operatorname{tg} t$ и $y = \dfrac{u}{\cos t}$, где $u = u(t)$.

Замена переменных в уравнениях с частными производными

Вводя новые независимые переменные ξ и η, решить следующие уравнения:

$\boxed{3458}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $\xi = x + y$ и $\eta = x - y$.

$\boxed{3460}$ $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ $(a \neq 0)$, если $\xi = x$ и $\eta = y - bz$.

Принимая u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$\boxed{3462}$ $xz'_x + \sqrt{1+y^2}\,z'_y = xy$, если $u = \ln x$ и $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

$\boxed{3465}$ $x\,z'_x + y\,z'_y = \dfrac{x}{z}$, если $u = 2x - z^2$ и $v = \dfrac{y}{z}$.

Преобразовать следующие выражения к полярным координатам ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$):

$\boxed{3481}$ $w = xu'_y - yu'_x$.

$\boxed{3484}$ $w = u''_{xx} + u''_{yy}$.

Приняв u и v за новые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$\boxed{3489}$ $2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} + z'_x + z'_y = 0$, если $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$.

$\boxed{3493}$ $z''_{xx} + z''_{yy} + m^2z = 0$, если $x = e^y\cos v$, $y = e^y\sin v$.

$\boxed{3495}$ $x^2z''_{xx} - y^2z''_{yy} = 0$, если $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

$\boxed{3499}$ $xz''_{xx} - yz''_{yy} = 0$, если $x = (u+v)^2$, $y = (u-v)^2$.

Домашнее задание № 20
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Замена переменных в обыкновенных диф. ур.

$\boxed{3431}$ Преобразовать уравнение $y'y''' - 3y''^2 = x$, приняв y за новую независимую переменную.

$\boxed{3435}$ Вводя новые переменные, преобразовать диф. уравнение: $y''' = \dfrac{6y}{x^3}$, если $t = \ln|x|$.

Замена переменных в уравнениях с частными производными

Вводя новые независимые переменные ξ и η, решить следующие уравнения:

$\boxed{3459}$ $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad$ если $\quad \xi = x \quad$ и $\quad \eta = x^2 + y^2$.

$\boxed{3461}$ $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z, \quad$ если $\quad \xi = x \quad$ и $\quad \eta = \dfrac{y}{x}$.

Принимая u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$\boxed{3463}$ $(x+y)z'_x - (x-y)z'_y = 0, \quad$ если $\quad u = \ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

$\boxed{3464}$ $xz'_x + yz'_y = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad$ если $\quad u = \dfrac{y}{x}, \quad v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$\boxed{3466}$ $(x+z)z'_x + (y+z)z'_y = x+y+z, \quad$ если $\quad u = x+z \quad$ и $\quad v = y+z$.

$\boxed{3469}$ В уравнении $u'_x + u'_y + u'_z = 0$ положить $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = z - x$.

Сделать замену независимых переменных в следующем выражении:

$\boxed{3468}$ $(z'_x)^2 + (z'_y)^2, \quad x = uv, \quad y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

Преобразовать следующие выражения к полярным координатам ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$):

$\boxed{3482}$ $w = xu'_x + yu'_y$. $\qquad \boxed{3483}$ $w = (u'_x)^2 + (u'_y)^2$.

$\boxed{3485}$ $w = x^2u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2u''_{yy}$.

Приняв u и v за новые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$\boxed{3490}$ $(1+x^2)z''_{xx} + (1+y^2)z''_{yy} + xz'_x + yz'_y$,
если $\quad u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

$\boxed{3492}$ $z''_{xx} + z''_{yy} = 0, \quad$ если $\quad u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \; v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

$\boxed{3494}$ $z''_{xx} - yz''_{yy} = \dfrac{1}{2}z'_y \quad (y > 0), \quad$ если $\quad u = x - 2\sqrt{y}, \; v = x + 2\sqrt{y}$.