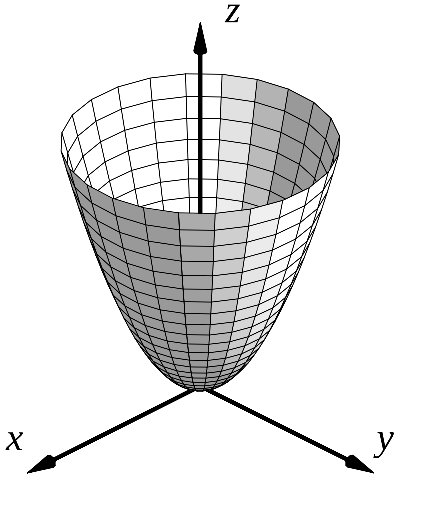
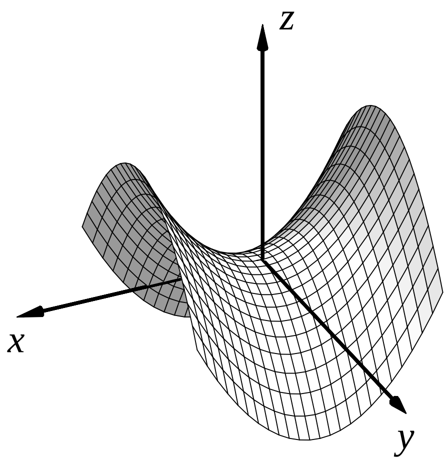
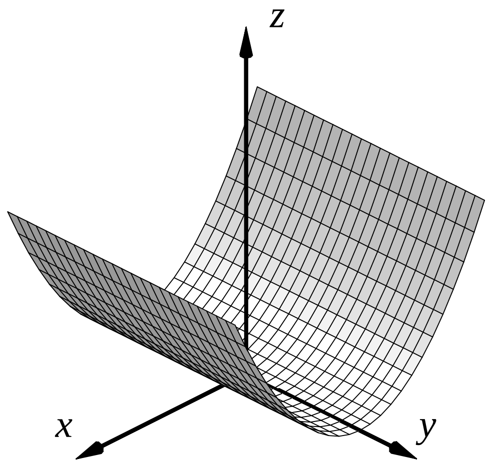
Графики некоторых квадратичных форм



$z = x^2 + y^2$



$z = x^2 - y^2$



$z = x^2$

Схема исследования на знакоопределённость квадратичной формы от двух переменных

Пусть $Q(x,y) = a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2$,

$$Q_e = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2}^2.$$

1) если $\det \Delta > 0$:
   1a) если $a_{1,1} > 0$, то $Q > 0$;
   1b) если $a_{1,1} < 0$, то $Q < 0$;
2) если $\det \Delta < 0$, то $Q \gtrless 0$;
3) если $\det \Delta = 0$ и $Q_e \neq 0$:
   3a) если $a_{1,1} \geqslant 0$ и $a_{2,2} \geqslant 0$, то $Q \geqq 0$;
   3b) если $a_{1,1} \leqslant 0$ и $a_{2,2} \leqslant 0$, то $Q \leqq 0$;
4) если $Q_e = 0$, то $Q = 0$.

Пример 1. $Q(x,y) = 3x^2 - 6xy + 4y^2$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0, \qquad a_{1,1} = 3 > 0.$$

Ответ: $Q > 0$ (квадратичная форма положительно определена).

Пример 2. $Q(x,y) = -x^2 + xy - y^2$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0, \qquad a_{1,1} = -1 < 0.$$

Ответ: $Q < 0$ (квадратичная форма отрицательно определена).

Пример 3. $Q(x,y) = 2x^2 + 8xy + 3y^2$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10 < 0.$$

Ответ: $Q \gtrless 0$ (квадратичная форма знакопеременная).

Пример 4. $Q(x,y) = 9x^2 - 6xy + y^2$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad a_{1,1} = 9 > 0, \qquad a_{2,2} = 1 > 0.$$

Ответ: $Q \geqq 0$ (квадратичная форма квазиположительна).