Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр
12-е занятие. Площадь фигуры. Длина кривой

Площадь фигуры (повторение)

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

$\boxed{\text{A1}}$ $x = y^3, \quad y = x \quad (x \geqslant 0).$

$\boxed{\text{A2}}$ $x^3 + y^3 = 3axy \quad$ (лист Декарта).

Длина кривой

Длина дуги кривой, заданной параметрически:

$$\boxed{\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.}$$

$\boxed{2443}$ $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$

$\boxed{\ell = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx}$ — длина дуги в прямоугольных координатах.

$\boxed{2433}$ $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ от $A(0; a)$ до $B(b; h)$.

$\boxed{2432}$ $y^2 = 2px \quad (0 \leqslant x \leqslant x_0).$

$\boxed{2440}$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad$ (астроида).

$\boxed{\ell = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi}$ — длина дуги в полярных координатах.

$\boxed{2448}$ $\rho = a(1 + \cos\varphi).$

$\boxed{2449}$ $\rho = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi} \quad (|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}).$

Домашнее задание № 12
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Найти площади фигур, ограниченных линиями (делать рисунки):

$\boxed{2428}$ $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$. (перейти к полярным координатам, найти пределы изменения φ).

$\boxed{2421}$ $r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ (парабола), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{2422}$ $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ (эллипс).

$\boxed{2422.1}$ $r = 3 + 2\cos\varphi$.

Найти длины дуг следующих кривых:

$\boxed{2431}$ $y = x^{3/2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

$\boxed{2435}$ $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$ $(1 \leqslant y \leqslant e)$.

$\boxed{2436}$ $y = a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant b < a)$.

$\boxed{2437}$ $y = \ln\cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant a,\ a < \frac{\pi}{2})$.

$\boxed{2442}$ $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

$\boxed{2444}$ $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (развёртка окружности).

$\boxed{2446}$ $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда) при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

$\boxed{2450}$ $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Дополнительное задание

Представить следующую сумму S_n как интегральную сумму для некоторой функции на отрезке $[0,1]$, и вычислить отсюда предел S_n при $n \to +\infty$:

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$