

Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр
13-е занятие. Вычисление объёмов

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad \text{— объём тела по известным поперечным сечениям.}$$

2456 Найти объём чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b , верхнее ребро равно c , а высота равна h .

2463 Найти объём тела, ограниченного следующей поверхностью (эллипсоид):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx \quad \text{— объём тела вращения (вокруг оси } Ox).$$

Найти объёмы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезков следующих линий:

2472 $y = b \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}$, где $0 \leq x \leq a$, вокруг оси Ox (нейлоид).

2473 б) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси Oy .

2471 Доказать, что объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq y(x)$, где $y(x)$ — однозначная непрерывная функция, равен

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

Найти объёмы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезков следующих линий:

2473 б) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси Oy .

2474 $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$):

а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2476 а) $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$): вокруг оси Ox .

Домашнее задание № 13

Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Разобраться с нерешёнными примерами из предыдущих домашних заданий!

2457 Найти объём обелиска, параллельные основания которого суть прямоугольники со сторонами A , B и a , b , а высота равна h .

2458 Найти объём усечённого конуса, основания которого суть эллипсы с полуосями A , B и a , b , а высота равна h .

Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

2464 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$

2462 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a}x, \quad z = 0.$

Найти объёмы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезков следующих линий:

2473 а) $y = 2x - x^2, \quad y = 0$: а) вокруг оси Ox .

2476 б) $y = e^{-x}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x < +\infty)$: вокруг оси Oy .

2477 $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad (0 < a \leq b)$: вокруг оси Ox .

2479 $y = e^{-x}\sqrt{\sin x} \quad (0 \leq x < +\infty)$: вокруг оси Ox .

2481 аб) $x = a \sin^3 t, \quad y = b \cos^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$:

а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2480 аб) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$:

а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

Дополнительное задание

2257 С помощью подходящих замен доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то

а) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx, \quad б) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$