

Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр
14-е занятие. Площадь поверхности вращения.
Несобственные интегралы

Повторение: объём тела

A1 Найти объём тела, ограниченного поверхностями:
 $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 2y, \quad z = 0.$

2480B $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad y = 0:$
в) вокруг прямой $y = 2a.$

A2 $(x - a)^2 + y^2 = c^2,$ где $0 < c < a,$ вокруг оси $Oy.$

Площадь поверхности вращения

Пусть гладкая кривая задана параметрическим уравнением $x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2.$ Тогда площадь поверхности, образованной вращением этой кривой вокруг некоторой оси, равна

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} R(t) ds(t),$$

где $ds(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ — дифференциал длины дуги, $R(t)$ — расстояние от точки $(x(t), y(t))$ до оси вращения. Например, если фигуру вращают вокруг оси $Ox,$ то $R(t) = |y(t)|.$

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

2495 $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2a);$
а) вокруг оси $Ox;$ б) вокруг оси $Oy;$ в) вокруг прямой $y = 2a.$

2488 $y = \operatorname{tg} x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$ вокруг оси $Ox.$

Несобственные интегралы

$$\text{2335} \int_0^1 \ln x dx. \quad \text{2347} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

Домашнее задание № 14

Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

Найти объём тела, ограниченного поверхностями:

$$\boxed{2464} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$$

$$\boxed{2465} \quad x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

Найти объём тела вращения:

$$\boxed{A3} \quad (x - b)^2 + y^2 = a^2, \quad \text{где } 0 < a < b, \quad \text{вокруг оси } Oy.$$

$$\boxed{A4} \quad x^2 + (y - b)^2 = a^2, \quad \text{где } 0 < a < b, \quad \text{вокруг оси } Oy.$$

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

$$\boxed{2487} \quad y = a \cos \frac{\pi x}{2b} \quad (|x| \leq b) \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

$$\boxed{2489} \quad y^2 = 2px \quad (0 \leq x \leq x_0):$$

а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

$$\boxed{2491} \quad x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad (b \geq a) \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

$$\boxed{2492} \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

Указание: использовать параметризацию.

$$\boxed{2497} \quad r = a(1 + \cos \varphi) \quad \text{вокруг полярной оси.}$$

$$\boxed{2498a} \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad \text{вокруг полярной оси.}$$

Вычислить несобственные интегралы:

$$\boxed{2334} \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0). \quad \boxed{2336} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}. \quad \boxed{2338} \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$$

$$\boxed{2340} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}. \quad \boxed{2346} \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \quad (a > 0).$$