Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр
18-е занятие. Ряды с неотрицательными членами

Найти n-ю частичную сумму S_n ряда и сумму S этого ряда:

$\boxed{\text{A1}}$ $6 + 2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \ldots$

$\boxed{\text{A2}}$ $1 + 2q + 3q^2 + \ldots nq^{n-1} + \ldots$ Подсказка: найти $S_n - qS_n$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$

$\boxed{\text{A4}}$ Вывести формулу для $\sum_{k=1}^{n} \sin \alpha n$, где $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Подсказка: умножить на $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Доказать расходимость ряда, используя необх. усл. сх-ти:

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. $\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}}$. $\boxed{\text{A7}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2}$.

Исследовать на сходимость с помощью интегрального признака и признаков сравнения:

$\boxed{\text{A8}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. $\boxed{\text{A9}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4 n}{n\sqrt{n+3}}$. $\boxed{\text{A10}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$. $\boxed{\text{A11}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Признаки Даламбера (d'Alembert), Коши (Cauchy) и Раабе (Raabe):

$$\mathscr{A} := \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad \text{Вывод: } \mathscr{A} > 1 \text{ — расх.; } \mathscr{A} < 1 \text{ — сх.}$$

$$\mathscr{C} := \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}. \qquad \text{Вывод: } \mathscr{C} > 1 \text{ — расх.; } \mathscr{C} < 1 \text{ — сх.}$$

$$\mathscr{R} := \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right). \qquad \text{Вывод: } \mathscr{R} > 1 \text{ — сх.; } \mathscr{R} < 1 \text{ — расх.}$$

$\boxed{\text{A12}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. $\boxed{\text{2581б}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

$\boxed{\text{A13}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^5\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$. $\boxed{\text{A14}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

$\boxed{\text{A15}}$ $\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$. Использовать формулу Стирлинга: $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

$\boxed{\text{A16}}$ $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Домашнее задание № 18
Матем. анализ, прикл. матем., 2-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Найти n-ю частичную сумму S_n ряда и сумму S этого ряда:

$\boxed{2548}$ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\ldots$

$\boxed{\text{A2}}$ $\left(3+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{6}\right)+\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{18}\right)+\ldots+\left(\dfrac{3}{2^{n-1}}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 3^{n-1}}\right)+\ldots$

$\boxed{\text{A3}}$ $\dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\dfrac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}+\ldots$

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cos\frac{3\alpha}{2^{n+1}}.$ Подсказка: $\sin x\cos y=\ldots$.

$\boxed{\text{A5}}$ Вывести формулу для $\sum_{k=0}^{n}\cos\alpha n$, где $\alpha\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
Подсказка: умножить на $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Исследовать сходимость с помощью интегрального признака и признаков сравнения:

$\boxed{2563}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$ $\boxed{2564}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$

$\boxed{2608}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}.$ $\boxed{2609}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n-1}{n+1}\quad(n>1).$

Исследовать сходимость с помощью признаков Даламбера или Коши:

$\boxed{2578}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}.$ $\boxed{2579}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$

$\boxed{2580}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$ $\boxed{2581\text{a}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}.$ $\boxed{2582}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$

$\boxed{2583}$ $\dfrac{1000}{1}+\dfrac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\dfrac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$

$\boxed{2586}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$ $\boxed{2588}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$ $\boxed{2589.1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}.$

Исследовать сходимость с помощью признака Раабе:

$\boxed{2598,\ p=1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$ $\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\alpha}}$, где α — параметр.