# 2-е занятие. Частные производные сложной функции
# Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

## Повторение

$\boxed{3258}$ Найти $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}$, если $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

$\boxed{3307}$ Показать, что функция $u(x, y) = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

$\boxed{3342}$ Найти производную функции $u = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(1, 1)$ в направлении $l$, составляющем угол $\alpha$ с положительным направлением оси $Ox$.

## Частные производные сложной функции

$\boxed{\text{К } 3.28}$ Для функции $g(x, y) = f(u(x, y))$ найти $g'_x$ и $g'_y$, если:

1) $u = x^2 + e^y$; 2) $u = \sqrt[3]{x^3 + xy^2}$; 4) $u = \operatorname{arcctg}(x + \ln y)$.

$\boxed{\text{К } 3.29}$ Для функции $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ найти $g'_x$ и $g'_y$, если:

1) $u = xy,\ v = x/y$; 2) $u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy}$;
3) $u = x\cos y,\ v = x\sin y$; 4) $u = \arcsin x^2,\ v = x^y$.

Найти частные производные первого и второго порядка от следующих сложных функций:

$\boxed{\text{A1}}$ $\varphi(x, y) = f(x + y)$. $\boxed{\text{A2}}$ $\varphi(x, y) = f(xy)$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\varphi(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

$\boxed{\text{A4}}$ $\varphi(x, y) = f(x^2 + y^2, 2xy)$.

Предполагая, что функции $\varphi$, $\psi$ и т. п. дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующие равенства:

$\boxed{3318}$ $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz$, если $z(x, y) = y\varphi(x^2 - y^2)$.

$\boxed{3321}$ $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

$\boxed{3326}$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

# Домашнее задание № 2
# Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{3227}$ Найти частные производные первого и второго порядков: $u = x^{y/z}$.

$\boxed{3311}$ Доказать, что функция $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ удовлетворяет уравнению Лапласа: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

$\boxed{3341}$ Найти производную функции $u = x^2 - y^2$ в точке $M(1, 1)$ в направлении $l$, которое составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси $Ox$.

## Частные производные сложной функции

В следующих упражнениях нужно найти производные первого и второго порядков от сложных функций, предполагая, что функция $f$ дифференцируема нужное число раз:

$\boxed{3283}$ $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$. $\boxed{3284}$ $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$.

$\boxed{3285}$ $u = f(x, xy, xyz)$.

$\boxed{3286}$ Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = f(x + y, xy)$.

$\boxed{3287}$ Найти $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

$\boxed{3308}$ Доказать, что если функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция $v(x, y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Предполагая, что функции $\varphi$, $\psi$ и т. п. дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующие равенства:

$\boxed{3322}$ $x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, если $z(x, y) = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

$\boxed{3323}$ $(x^2 - y^2) \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$, если $z(x, y) = e^y \varphi\left(y e^{x^2/2y^2}\right)$.

$\boxed{3324}$ $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \dfrac{\partial u}{\partial y} + \beta z \dfrac{\partial u}{\partial z} = nu$, если $u = x^n \varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}, \dfrac{z}{x^\beta}\right)$.

$\boxed{3327}$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.