4-е занятие. Дифференциалы высших порядков
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Считая x независимой переменной, найти d^2y, если:

$\boxed{1131}$ $y = \sqrt{1+x^2}$.

Пусть u и v — дважды дифференцируемые функции от переменной x. Найти d^2y, если:

$\boxed{1134}$ $y = uv$. $\boxed{1139}$ $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

Найти дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций (x, y, z — независимые переменные):

$\boxed{3236}$ $u = \dfrac{x}{y}$. $\boxed{3238}$ $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

$\boxed{3243}$ Доказать, что если $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то $d^2u \geqslant 0$ (при любых значениях $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ и любых значениях dx, dy, dz).

Найти полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y, z — независимые переменные):

$\boxed{3289}$ $u = f(t)$, где $t = \dfrac{y}{x}$.

$\boxed{\text{A1}}$ $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x - y$, $\eta = xy$.

$\boxed{3298}$ $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

Замена переменных

Вводя новые переменные, преобразовать следующие дифференциальные уравнения:

$\boxed{3434}$ $x^2y'' + xy' + y = 0$, если $x = e^t$.

$\boxed{3440}$ $(1+x^2)^2y'' = y$, если $x = \operatorname{tg} t$ и $y = \dfrac{u}{\cos t}$, где $u = u(t)$.

$\boxed{3433}$ Преобразовать уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

приняв x за функцию и $t = xy$ — за независимую переменную.

Домашнее задание № 4
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Считая x независимой переменной, найти d^2y, если:

$\boxed{1132}$ $y = \dfrac{\ln x}{x}$. $\boxed{1133}$ $y = x^x$.

Пусть u и v — дважды дифференцируемые функции от переменной x. Найти d^2y, если:

$\boxed{1135}$ $y = \dfrac{u}{v}$. $\boxed{1138}$ $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

$\boxed{1136}$ $y = u^m v^n$ (m и n — постоянные).

Найти дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций (x, y, z — независимые переменные):

$\boxed{3235}$ $u = x^m y^n$. $\boxed{3239}$ $u = e^{xy}$.

$\boxed{3240}$ $u = xy + yz + zx$. $\boxed{3241}$ $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$.

Найти полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y, z — независимые переменные):

$\boxed{3288}$ $u = f(t)$, где $t = x + y$. $\boxed{3292}$ $u = f(x^2+y^2+z^2)$.

$\boxed{3294}$ $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

$\boxed{3295}$ $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = xy$, $\eta = \dfrac{x}{y}$.

$\boxed{3296}$ $u = f(x+y, z)$. $\boxed{3297}$ $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$.

$\boxed{3299}$ $u = f(x, y, z)$, где $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

$\boxed{3301}$ $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x^2+y^2$, $\eta = x^2-y^2$, $\zeta = 2xy$.

Замена переменных

$\boxed{3431}$ Преобразовать уравнение $y'y''' - 3y''^2 = x$, приняв y за новую независимую переменную.

$\boxed{3432}$ Преобразовать уравнение $y'^2y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0$, приняв y за новую независимую переменную.

Вводя новые переменные, преобразовать диф. уравнение:

$\boxed{3435}$ $y''' = \dfrac{6y}{x^3}$, если $t = \ln|x|$.

$\boxed{3439}$ $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, если $x = e^t$ и $y = ue^{2t}$, где $u = u(t)$.

$\boxed{3442}$ $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$, если $x = u + t$ и $y = u - t$, где $u = u(t)$.

Замена переменных. Конспект

Вводя новые переменные, преобразовать следующие дифференциальные уравнения:

$\boxed{3434}$ $x^2y'' + xy' + y = 0$, если $x = e^t$.

Решение. Нужно перейти к новой независимой переменной t и новой функции u, так что «$u(t) = y(x)$», т. е.

$$u(t) = y(e^t).$$

Дифференцируем это равенство, чтобы выразить $y'(x)$ через u и t:

$$\begin{aligned} &u'(t) = y'(e^t)e^t, \\ &y'(e^t) = e^{-t} \cdot u'(t), \qquad (*) \\ &\boxed{y'(x) = e^{-t}u'(t).} \end{aligned}$$

Дифференцируем равенство $(*)$, чтобы найти $y''(x)$:

$$y''(e^t)e^t = -e^{-t} \cdot u'(t) + e^{-t}u''(t), \qquad \boxed{y''(x) = e^{-2t}(u''(t) - u'(t)).}$$

Подставляем x, $y'(x)$ и $y''(x)$ в исходное уравнение:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(u''(t) - u'(t)) + e^t \cdot e^{-t}u'(t) + u(t) = 0.$$

Ответ: $u'' + u = 0$.

Вводя новые переменные, преобразовать диф. уравнение:

$\boxed{3440}$ $(1+x^2)^2y'' = y$, если $x = \operatorname{tg} t$ и $y = \dfrac{u}{\cos t}$, где $u = u(t)$.

Решение. Исходим из равенства

$$y(\operatorname{tg} t) = \frac{u(t)}{\cos t}.$$

Дифференцируем по t и упрощаем:

$$\frac{y'(\operatorname{tg} t)}{\cos^2 t} = \frac{u'(t)\cos t + u(t)\sin t}{\cos^2 t}.$$

$$y'(\operatorname{tg} t) = u'(t)\cos t + u(t)\sin t, \tag{$*$}$$

$$\boxed{y'(x) = u'(t)\cos t + u(t)\sin t.}$$

Дифференцируем равенство $(*)$ ещё раз по t, чтобы найти y'':

$$y''(\operatorname{tg} t)\cdot\frac{1}{\cos^2 t} = u''(t)\cos t - u'(t)\sin t + u'(t)\sin t + u(t)\cos t.$$

$$\boxed{y''(x) = (u''(t)+u(t))\cos^3 t.}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$\frac{1}{\cos^4 t}\cdot(u''(t)+u(t))\cos^3 t = \frac{u(t)}{\cos t}.$$

Ответ: $u''(t) = 0$.

$\boxed{3433}$ Преобразовать уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

приняв x за функцию и $t = xy$ — за независимую переменную.

Решение. Предлагается ввести такую независимую переменную t и такую функцию $u(t)$, чтобы $u(t) = x(t)$ и $t = x(t)y(x(t))$, т. е.

$$y(u(t)) = \frac{t}{u(t)}.$$

Дифференцируем это равенство по t:

$$y'(u(t))u'(t) = \frac{u(t) - tu'(t)}{u^2(t)}.$$

Отсюда

$$\boxed{y'(u(t)) = \frac{1}{u(t)u'(t)} - \frac{t}{u^2(t)}.}$$

Дифференцируем ещё раз по t:

$$\begin{aligned} y''(u(t))u'(t) &= -\frac{u'^2(t) + u(t)u''(t)}{u^2(t)u'^2(t)} - \frac{u^2(t) - 2tu(t)u'(t)}{u^4(t)} = \\ &= -\frac{1}{u^2(t)} - \frac{u''(t)}{u(t)u'^2(t)} - \frac{1}{u^2(t)} + \frac{2tu'(t)}{u^3(t)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\boxed{y''(u(t)) = -\frac{2}{u^2(t)u'(t)} - \frac{u''(t)}{u(t)u'^3(t)} + \frac{2t}{u^3(t)}.}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$-\frac{2}{u^2(t)u'(t)} - \frac{u''(t)}{u(t)u'^3(t)} + \frac{2t}{u^3(t)} + \frac{2}{u^2(t)u'(t)} - \frac{2t}{u^3(t)} + \frac{t}{u(t)} = 0.$$

Ответ: $u''(t) - tu'^3(t) = 0$.