6-е занятие. Экстремумы функций нескольких перем. Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Замена переменных (повторение)

Преобразовать следующее выражение к полярным координатам:

$\boxed{3484}$ $w = u''_{xx} + u''_{yy}$.

Приняв u и v за новые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$\boxed{3493}$ $z''_{xx} + z''_{yy} + m^2 z = 0$, если $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$.

Квадратичные формы

Исследовать на знакоопределённость следующие квадратичные формы:

$\boxed{\text{Q1}}$ $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

$\boxed{\text{Q2}}$ $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

$\boxed{\text{Q3}}$ $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2$.

$\boxed{\text{Q4}}$ $Q(x_1, x_2) = 4x_1x_2$.

Экстремумы функций нескольких переменных

Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных:

$\boxed{3621}$ $z(x, y) = x^2 + (y-1)^2$.

$\boxed{3622}$ $z(x, y) = x^2 - (y-1)^2$.

$\boxed{3623}$ $z(x, y) = (x - y + 1)^2$.

$\boxed{3627}$ $z(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

$\boxed{3642}$ $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

Домашнее задание № 6
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Преобразовать следующее выражение к полярным координатам ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$):

$\boxed{3485}$ $w = x^2u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2u''_{yy}$.

Приняв u и v за новые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$\boxed{3494}$ $z''_{xx} - yz''_{yy} = \frac{1}{2}z'_y \quad (y > 0)$, если $u = x - 2\sqrt{y}$, $v = x + 2\sqrt{y}$.

$\boxed{3497}$ $xyz''_{xx} - (x^2 + y^2)z''_{xy} + xyz''_{yy} + yz'_x + xz'_y = 0$,
если $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $\quad v = xy$.

Квадратичные формы

Исследовать следующие квадратичные формы на знакоопределённость двумя способами (приводя к каноническому виду и с помощью миноров):

$\boxed{\text{A1}}$ $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$.

$\boxed{\text{A2}}$ $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2$.

$\boxed{\text{A3}}$ $Q(x_1, x_2) = 4x_1x_2 - 2x_2^2$.

$\boxed{\text{A4}}$ $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$.

Ответы: $Q < 0$, $Q \gtrless 0$, $Q \gtrless 0$, $Q \geqq 0$.

Экстремум функции нескольких переменных

Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных:

$\boxed{3626}$ $z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

$\boxed{3636}$ $z(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ $(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2})$.

$\boxed{3633}$ $z(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$.

$\boxed{3643}$ $u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

$\boxed{3644}$ $u(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Конспект 6-го занятия.
Экстремумы функций нескольких перем.
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Преобразовать следующее выражение к полярным координатам:

$\boxed{3484}$ $w = u''_{xx} + u''_{yy}$.

Решение. Пусть $u(x, y) = f(r, \varphi)$, т. е. $\boxed{u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = f(r, \varphi)}$. Дифференцируем это равенство по r и отдельно по φ:

$$u'_x \cdot \cos\varphi + u'_y \cdot \sin\varphi = f'_r; \tag{1}$$

$$u'_x \cdot (-r\sin\varphi) + u'_y \cdot r\cos\varphi = f'_\varphi. \tag{2}$$

Умножая (1) на $\cos\varphi$, (2) на $-\frac{1}{r}\sin\varphi$ и складывая, найдём u'_x. Умножая (1) на $\sin\varphi$, (2) на $\frac{1}{r}\cos\varphi$ и складывая, найдём u'_y:

$$\boxed{u'_x = f'_r \cdot \cos\varphi - \frac{1}{r}f'_\varphi \cdot \sin\varphi} \tag{3}$$

$$\boxed{u'_y = f'_r \cdot \sin\varphi + \frac{1}{r}f'_\varphi \cdot \cos\varphi} \tag{4}$$

Эти равенства желательно запомнить. Дифференцируем равенства (3) и (4) по r и по φ:

$$u''_{xx}\cos\varphi + u''_{xy}\sin\varphi = f''_{rr}\cos\varphi - \frac{1}{r}f''_{r\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{r^2}f'_\varphi\sin\varphi;$$

$$-ru''_{xx}\sin\varphi + ru''_{yy}\cos\varphi = f''_{r\varphi}\cdot\cos\varphi - \frac{1}{r}f''_{\varphi\varphi}\sin\varphi - f'_r\sin\varphi - \frac{1}{r}f'_\varphi\cos\varphi;$$

$$u''_{xy}\cos\varphi + u''_{yy}\sin\varphi = f''_{rr}\sin\varphi + f''_{r\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{r^2}f'_\varphi\cos\varphi;$$

$$-ru''_{xy}\sin\varphi + ru''_{yy}\cos\varphi = f''_{r\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{r}f''_{\varphi\varphi}\cos\varphi + f'_r\cos\varphi - \frac{1}{r}f'_\varphi\sin\varphi.$$

Отсюда

$$u''_{xx} = f''_{rr}\cos^2\varphi - f''_{r\varphi}\frac{\sin 2\varphi}{r} + f''_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + f'_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + f'_\varphi\frac{\sin 2\varphi}{r^2};$$

$$u''_{yy} = f''_{rr}\sin^2\varphi + f''_{r\varphi}\frac{\sin 2\varphi}{r} + f''_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + f'_r\frac{\cos^2\varphi}{r} - f'_\varphi\frac{\sin 2\varphi}{r^2}.$$

Ответ: $w = f''_{rr} + \frac{1}{r}f'_r + \frac{1}{r^2}f''_{\varphi\varphi}$.