7-е занятие. Экстремумы. Метод Лагранжа
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Экстремумы функций нескольких переменных

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных:

$\boxed{3642}$ $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$

$\boxed{3625}$ $z(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y).$

Условный экстремум. Множители Лагранжа

Задача определения экстремума функции $f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ при наличии ряда соотношений $\varphi_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ m < n)$ сводится к нахождению обычного экстремума для *функции Лагранжа*

$$L(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x),$$

где λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ — параметры (*множители Лагранжа*).

Найти точки условного экстремума следующих функций:

$\boxed{A1}$ $z(x, y) = xy$ при $x - 2y + 4 = 0.$

$\boxed{3663}$ $u(x, y, z) = xyz,$ если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x + y + z = 0.$
Провести подробное исследование только для одной стационарной точки: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$

$\boxed{3658}$ $z(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y,$ если $x - y = \frac{\pi}{4}.$

$\boxed{3655}$ $z(x, y) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b},$ если $x^2 + y^2 = 1$ $(a > 0,\ b > 0).$

$\boxed{3692}$ Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объёма.

$\boxed{A2}$ С помощью множителей Лагранжа найти на окружности $x^2 + y^2 = 2$ точку $(x; y)$, расстояние от которой до точки $(3; -3)$ минимально.

Домашнее задание № 7
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ В дифференциальном уравнении

$$u''_{xx} - u''_{yy} = 0$$

перейти к новым независимым переменным ρ и φ и новой функции f, которые связаны со старыми переменными x и y и старой функцией u следующими соотношениями:

$$x = \rho \operatorname{ch} \varphi, \qquad y = \rho \operatorname{sh} \varphi, \qquad u(x, y) = f(\rho, \varphi).$$

Исследовать функции на экстремумы:

$\boxed{3628}$ $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y} \quad (x > 0,\ y > 0).$

$\boxed{3643}$ $u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

$\boxed{3644}$ $u(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z} \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$

Найти точки условного экстремума следующих функций:

$\boxed{3654}$ $z(x, y) = xy$, если $x + y = 1$.

$\boxed{3656}$ $z(x, y) = x^2 + y^2$, если $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

$\boxed{3657.1}$ $z(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, если $4x^2 + y^2 = 25$.

$\boxed{3663.1}$ $u(x, y, z) = xy + yz$, если $x^2 + y^2 = 2$ и $y + z = 2$ $(x > 0,$ $y > 0,\ z > 0)$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти правильную четырёхугольную пирамиду с заданной боковой поверхностью S, объём которой максимален (в качестве переменных взять сторону основания x и высоту y).

$\boxed{\text{A3}}$ Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Найти катеты x и y, при которых площадь этого треугольника максимальна.

$\boxed{\approx 3695}$ В данный прямой круговой конус (высота H, радиус основания R) вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, объём которого максимален. В качестве переменных можно взять сторону основания x и высоту параллелепипеда y.

Конспект 7-го занятия.
Экстремумы. Метод Лагранжа
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Найти точки условного экстремума следующих функций:

$\boxed{\text{A1}}$ $z(x,y) = xy \quad$ при $\quad x - 2y + 4 = 0$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y) = xy - \lambda(x - 2y + 4).$$

Множитель λ считается параметром, т. е. каждому значению λ соответствует своя функция L. Находим частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x = y - \lambda, \qquad L'_y = x + 2\lambda.$$

Приравниваем их к нулю и дописываем уравнение связи. Получаем систему:

$$\begin{cases} y - \lambda = 0; \\ x + 2\lambda = 0; \\ x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = -2$, $y = 1$, $\lambda = 1$. Нашли стац. точку: $(-2; 1)$.

Теперь находим второй дифференциал функции $L(x,y)$:

$$d^2L = 2dxdy.$$

Из уравнения связи находим зависимость между дифференциалами:

$$dx - 2dy = 0.$$

Отсюда

$$d^2L = 4(dy)^2 > 0.$$

Ответ: $(-2; 1)$ — точка минимума.