10-е занятие. Замена переменных
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Найти площадь эллипса $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$, то есть вычислить интеграл $\iint\limits_G dx\,dy$.

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить интеграл $\iint\limits_\Omega y^3\,dx\,dy$, где область Ω ограничена кривыми

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad xy = 1, \quad xy = 2.$$

В двойном интеграле $\iint\limits_\Omega f(x, y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам ρ и φ, полагая $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$, и расставить пределы интегрирования:

$\boxed{3937}$ Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

$\boxed{3941}$ Ω — параболический сегмент: $-a \leqslant x \leqslant a$, $x^2/a \leqslant y \leqslant a$.

Перейдя к полярным координатам, вычислить двойный интеграл:

$\boxed{3955}$ $$\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в следующих интегралах:

$\boxed{3945}$ $$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy.$$

С помощью подходящей замены переменных свести двойной интеграл к однократному:

$\boxed{3962}$ $$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,dx\,dy.$$

Домашнее задание № 10
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$ перейти к полярным координатам ρ и φ, полагая $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$, и расставить пределы интегрирования:

$\boxed{3938}$ Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant ax \quad (a > 0)$.

$\boxed{3940}$ Ω — треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$.

Перейти к полярным координатам ρ и φ, и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в следующих интегралах:

$\boxed{3946}$ $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\, dy.$

Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$\boxed{3954}$ $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$

Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в следующих двойных интегралах:

$\boxed{3957}$ $\displaystyle\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy \quad (0 < a < b;\ 0 < \alpha < \beta),$ если $u = x$, $v = y/x$.

$\boxed{3958}$ $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x, y)\, dy,$ если $u = x + y$, $v = x - y$.

Перейдя к полярным координатам, заменить двойные интегралы однократными:

$\boxed{3951}$ $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy.$ $\boxed{3953}$ $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f(y/x)\, dx\, dy.$

Произведя соответствующую замену переменных, свести двойной интеграл к однократному:

$\boxed{3964}$ $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} f(xy)\, dx, dy$, где область Ω ограничена следующими кривыми:

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x, \quad y = 4x \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Конспект 10-го занятия.
Замена переменных
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Найти площадь эллипса $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$, то есть вычислить интеграл $\iint\limits_G dx\, dy$.

Решение. Естественно сделать следующую замену переменных:

$$x = a\rho\cos\varphi, \qquad y = a\rho\sin\varphi \qquad (\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Условия $\rho \geqslant 0$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ обеспечивают биективность отображения всюду, за исключением точки $(0, 0)$. Одну точку можно выбросить, так как её мера равна 0.

После этой замены условие $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ принимает вид $\rho \leqslant 1$.

Найдём якобиан отображения $(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & a\sin\varphi \\ -b\rho\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Отсюда

$$S = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 |ab\rho|\, d\varphi\, d\rho = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho = \pi ab.$$

Ответ: $S = \pi ab$.

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить интеграл $\iint\limits_\Omega y^3\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривыми

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad xy = 1, \quad xy = 2.$$

Решение. Из рисунка (а также из соображений непрерывности и связности) следует, что область задаётся следующими неравенствами:

$$1 \leqslant \frac{y}{x^2} \leqslant 2, \qquad 1 \leqslant xy \leqslant 2.$$

Напрашивается замена

$$u = \frac{y}{x^2}, \qquad v = xy.$$

Отсюда $x = u^{-1/3}v^{1/3}$, $y = u^{1/3}v^{2/3}$. Находим якобиан:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{-1/3}v^{-2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

Другой способ вычисления якобиана:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & y \\ \frac{1}{x^2} & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2} = -3u \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{3u}.$$

Вычисляем площадь:

$$S = \frac{1}{3}\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{u}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u}\int_1^2 dv = \frac{\ln 2}{3}.$$

В двойном интеграле $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам ρ и φ, полагая $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$, и расставить пределы интегрирования:

$\boxed{3937}$ Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Решение.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho.$$

$\boxed{3941}$ Ω — параболический сегмент: $-a \leqslant x \leqslant a$, $x^2/a \leqslant y \leqslant a$.

Решение. Подставляем $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ в условия для x и y:

$$-a \leqslant \rho\cos\varphi \leqslant a, \qquad \rho^2\cos^2\varphi \leqslant a\rho\sin\varphi, \rho\sin\varphi \leqslant a.$$

Из рисунка видно, что φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$ и от $\frac{3\pi}{4}$ до π. На каждом луче φ из $[0, \frac{\pi}{4}]$ радиус ρ изменяется от параболы до прямой $x = a$, т. е. от $\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ до $\frac{a}{\cos\varphi}$, а на каждом луче φ из $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ радиус ρ изменяется от параболы до прямой $x = -a$, т. е. от $\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ до $-\frac{a}{\cos\varphi}$.

Ответ:

$$\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{a}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\varphi + \int_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{-\frac{a}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\varphi.$$

Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$\boxed{3955}$ $$\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Решение.

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\pi^{2\pi} \rho\sin\rho\,d\rho = 2\pi\int\limits_\pi^{2\pi} \rho\sin\rho\,d\rho.$$

Интегрируем по частям:

$$I = \left[\begin{array}{cc} u=\rho, & dv=\sin\rho\,d\rho \\ du=d\rho, & v=-\cos\rho \end{array}\right] = -2\pi\cdot\,\rho\cos\rho|_\pi^{2\pi} + 2\pi\int\limits_\pi^{2\pi}\cos\rho\,d\rho = -6\pi^2.$$

Ответ: $-6\pi^2$.

Перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в следующем интеграле:

$\boxed{3945}$ $$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy.$$

С помощью подходящей замены переменных свести двойной интеграл к однократному:

$\boxed{3962}$ $$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,dx\,dy.$$

Решение. С помощью рисунка легко увидеть, что условие $|x|+|y|\leqslant 1$ равносильно системе следующих условий:

$$x+y\leqslant 1,\qquad x+y\geqslant -1,\qquad y-x\leqslant 1,\qquad y-x\geqslant -1.$$

Поэтому напрашивается замена $u=x+y$, $v=y-x$. Находим якобиан:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{-1}^{1} f(u)du = \int\limits_{-1}^{1} f(u)du.$$