11-е занятие. Вычисление площадей
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{3945 (повтор.)}}$ Перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$.

Вычисление площадей

$$\boxed{S = \iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x))dx} \qquad \boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi))\,d\varphi}$$

Найти площадь, ограниченную следующими кривыми:

$\boxed{3986}$ $(x-y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a > 0)$.

Переходя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры, ограниченной следующей кривой:

$\boxed{3987}$ $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2); \quad x^2+y^2 \geqslant a^2$.

Производя надлежащую замену переменных, найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$\boxed{3993}$ $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, \quad y > 0)$.

$\boxed{3998.1}$ $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $x^3 = cy^2$, $x^3 = dy^2 \quad (0 < a < b; 0 < c < d)$.

Вычисление объёмов цилиндроидов

Тело вида $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}$, где D — плоская фигура, называют *цилиндроидом* с основанием D. Формула для объёма цилиндроида:

$$\boxed{V = \iint\limits_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dx\,dy.}$$

Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$\boxed{4009}$ $z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0$.

$\boxed{\text{A1}}$ $x^2 + y^2 + a^2 z = a^2, \quad z = 0$ (перейти к полярной системе координат).

Домашнее задание № 11
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Перейти к полярным координатам ρ и φ, и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в следующих интегралах:

$\boxed{3946}$ $$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy.$$

Произведя соответствующую замену переменных, свести двойной интеграл к однократному:

$\boxed{3964}$ $\iint\limits_{\Omega} f(xy)\,dx, dy$, где область Ω ограничена следующими кривыми:

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x, \quad y = 4x \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Найти площади, ограниченные следующими кривыми:

$\boxed{3984}$ $xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (a > 0).$

$\boxed{3985}$ $y^2 = 2px + p^2, \quad y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, \quad q > 0).$

Вводя обобщённые полярные координаты ρ и φ по формулам

$$x = A\rho\cos^\alpha\varphi, \qquad y = B\rho\sin^\alpha\varphi \qquad (\rho \geqslant 0),$$

где A, B, α — надлежащим образом подобранные постоянные, найти площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми (параметры считаются положительными):

$\boxed{3991}$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k}.$

Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

$\boxed{3996}$ $x + y = a, \quad x + y = b, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x \quad (0 < a < b;\ 0 < \alpha < \beta).$

$\boxed{3997}$ $xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = x, \quad y = 2x \quad (x > 0, y > 0).$

Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$\boxed{4007}$ $z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$

$\boxed{4008}$ $x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (a \geqslant R\sqrt{2}).$

$\boxed{4029}$ $z = xy, \quad x^2 = y, \quad x^2 = 2y, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x, \quad z = 0.$