12-е занятие. Вычисление объёмов с помощью двойных интегралов Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Повторение

$\boxed{\text{A1}}$ Перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке:

$$\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$\boxed{3994.1}$ С помощью обобщённых полярных координат вычислить площадь фигуры, которая ограничена следующей кривой:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}.$$

Вычисление объёмов

$\boxed{\text{A2}}$ Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z=4-x^2,\quad y=5,\quad y=0,\quad z=0.$$

$\boxed{4010}$ Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z=\cos x\cos y,\quad z=0,\quad (|x+y|\leqslant \pi/2,\quad |x-y|\leqslant \pi/2).$$

$\boxed{4013}$ Переходя к полярным координатам, найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z^2=xy,\qquad x^2+y^2=a^2.$$

$\boxed{4016}$ Переходя к полярным координатам, найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2\geqslant a|x|\quad (a>0).$$

Домашнее задание № 12
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

$\boxed{3991}$ С помощью обобщённых полярных координат вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}.$$

$\boxed{3995}$ С помощью обобщённых полярных координат вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1, \qquad x=0, \qquad y=0.$$

Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$\boxed{4011}$ $z=\sin\dfrac{\pi y}{2x}, \quad z=0, \quad y=x, \quad y=0, \quad x=\pi.$

$\boxed{4012}$ $z=xy, \quad x+y+z=1, \quad z=0.$

Переходя к полярным координатам, найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$\boxed{4014}$ $z=x+y, \quad (x^2+y^2)^2=2xy, \quad z=0 \quad (x>0, \quad y>0).$

$\boxed{4015}$ $z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=x, \quad x^2+y^2=2x, \quad z=0.$

$\boxed{4017}$ $x^2+y^2-az=0, \quad (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), \quad z=0.$

$\boxed{4020}$ $z=x^2+y^2, \quad z=x+y.$

Конспект 12-го занятия. Вычисление объёмов с помощью двойных интегралов Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке:

$$\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Решение. Преобразуем уравнение окружности $(x-1)^2+y^2=1$ к полярным координатам:

$$\rho^2 = 2\cos\varphi.$$

Из этого уравнения и геометрических соображений получаем:

$$S=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho = \int\limits_{0}^{1} d\rho \int\limits_{-\arccos(\rho^2/2)}^{\arccos(\rho^2/2)} f(\ldots)\rho\,d\rho.$$

$\boxed{3994.1}$ С помощью обобщённых полярных координат вычислить площадь фигуры, которая ограничена следующей кривой:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5 = \frac{x^2y^2}{c^4} \qquad (x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0).$$

Решение. Замена переменных:

$$x = a\rho\cos^2\varphi, \qquad y = b\rho\sin^2\varphi.$$

Якобиан замены:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^2\varphi & -2a\rho\cos\varphi\sin\varphi \\ b\sin^2\varphi & 2b\rho\cos\varphi\sin\varphi \end{vmatrix} = 2ab\rho\cos\varphi\sin\varphi.$$

В новых координатах область задана следующими условиями:

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\varphi), \qquad \text{где}\quad \rho_2(\varphi)=\frac{a^2b^2}{c^4}\cos^4\varphi\sin^4\varphi.$$

Отсюда

$$S=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\rho_2(\varphi)}2ab\rho\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho=\frac{a^5b^5}{c^8}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\sin^9\varphi\,d\varphi.$$

Вычислим последний интеграл отдельно:

$$I_1=\frac{1}{2^{10}}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^9 2\varphi\,d(2\varphi)=\frac{1}{2^{10}}\int\limits_0^{\pi}\sin^9 t\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2^{10}}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2 t)^4 d(\cos t)=\frac{1}{2^{10}}\int\limits_{-1}^{1}(1-4u^2+6u^4-4u^6+u^8)\,du=$$

$$=\frac{1}{2^9}\left(1-\frac{4}{3}+\frac{6}{5}-\frac{4}{7}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{2^9}\cdot\frac{128}{315}=\frac{1}{4\cdot 315}.$$

Ответ: $\dfrac{a^5b^5}{1260c^8}$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z=4-x^2,\quad y=5,\quad y=0,\quad z=0.$$

Решение. Находим пересечение поверхностей $z=4-x^2$ и $z=0$: $x=2$ или $x=-2$. Получаем ограниченную область

$$D:\quad -2\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant 5.$$

В этой области $4-x^2\geqslant 0$, поэтому следует взять $z_1(x,y)=0$ и $z_2(x,y)=4-x^2$. Вычисляем объём:

$$V=\iint\limits_D(z_2(x,y)-z_1(x,y))\,dx\,dy=\int\limits_0^5dy\int\limits_{-2}^{2}(4-x^2)dx=$$

$$=5\cdot 2\int\limits_0^2(4-x^2)\,dx=10\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=10\cdot\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{160}{3}.$$

Ответ: $160/3$.

$\boxed{4010}$ Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z = \cos x \cos y, \quad z = 0, \quad (|x+y| \leqslant \pi/2, \quad |x-y| \leqslant \pi/2).$$

Решение. Введём обозначения: $z_1(x,y) = 0$, $z_2(x,y) = \cos x \, \cos y$,

$$D\colon \quad |x+y| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad |x-y| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Преобразуем выражение $z_2(x,y)$:

$$z_2(x,y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right).$$

Отсюда видно, что $z_2(x,y) \geqslant 0$ для всех (x,y) из D. Искомый объём равен

$$V = \iint\limits_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))\, dx\, dy.$$

Сделаем замену переменных:

$$u = x - y, \quad v = x + y, \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}.$$

В новых координатах получаем область

$$D'\colon \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Вычисляем объём:

$$V = \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos u + \cos v)\, dv = \int\limits_0^{\pi/2} du \int\limits_0^{\pi/2} (\cos u + \cos v)\, dv =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos u\, du + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos v\, dv = \pi.$$

Ответ: π.

$\boxed{4013}$ Переходя к полярным координатам, найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z^2 = xy, \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

Решение. В полярных (точнее, цилиндрических) координатах получаем следующие уравнения поверхностей:

$$z^2 = \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi, \qquad \rho = a.$$

Чтобы первое уравнение имело смысл, нужно потребовать $\sin\varphi\cos\varphi \geqslant 0$, откуда $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ или $\pi \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$. При этом z изменяется от $z_1(\rho, \varphi) = 0$ до

$$z_2(\rho, \varphi) = \rho\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

В полярных координатах получаем область

$$D'\colon \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \pi \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2; \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant a.$$

Вычисляем объём. Пользуясь периодичностью синуса, разбиваем на два равных интеграла:

$$V = \int\limits_D (z_2(\rho,\varphi) - z_1(\rho,\varphi))\, dx\, dy = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a \rho^2\sqrt{\sin 2\varphi}\, d\rho =$$
$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\varphi \cos^{1/2}\varphi\, d\varphi \int\limits_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{2a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\varphi\cos^{1/2}\varphi\, d\varphi.$$

Последний интеграл можно выразить через так называемые *интегралы Эйлера* (функции Γ и B), но мы этого делать не будем.

$\boxed{4016}$ Переходя к полярным координатам, найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 \geqslant a|x| \quad (a > 0).$$

Решение. Из симметрии следует, что $V = 8V_1$, где V_1 — та часть тела, которая лежит в октанте $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Из первого уравнения следует, что область D изменения (x, y) должна содержаться в круге

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2,$$

и для любой точки (x, y) координата z изменяется от 0 до $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Область D после перехода к полярным координатам задаётся следующими условиями:

$$D\colon \rho \geqslant a, \qquad \rho \geqslant a\cos\varphi, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$V_1 = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a} \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\, d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{3}\,(a^2-\rho^2)^{3/2}\Big|_{a\cos\varphi}^{a} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^3}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2a^3}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{16a^3}{9}$.