13-е занятие. Тройные интегралы
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Повторение

Д 4021 Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \qquad (z>0).$$

Тройные интегралы

А1 $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, где V — тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x+3y+z-6=0$.

А2 Вычислить якобиан перехода к цилиндрической системе координат:

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi, \qquad z=z.$$

Д 4080 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2, \quad z=1.$

А3 Вычислить якобиан перехода к сферической системе координат:

$$x=\rho\cos\psi\cos\varphi, \qquad y=\rho\cos\psi\sin\varphi, \qquad z=\rho\sin\psi.$$

Д 4088 Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz.$$

Д 4092 Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $z=ay^2, \quad z=by^2, \quad y>0 \quad (0<a<b), \quad z=\alpha x, \quad z=\beta x \quad (0<\alpha<\beta), \quad z=h \quad (h>0).$

Домашнее задание № 13
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Д 4022 Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

Д 4076 $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

Д 4077 $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена поверхностями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Д 4078 $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Д 4079 $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. (Использовать обобщённые сферические координаты.)

Д 4087 Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где область V ограничена поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$.

Д 4091 Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

Конспект 13-го занятия.
Тройные интегралы
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Д 4021 Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \qquad (z>0).$$

Решение. Из симметричности тела следует, что $V=4V_1$, где V_1 — объём той части тела, которая лежит в октанте $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. Пусть

$$z_1(x,y)=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}, \qquad z_2(x,y)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Будем искать объём тела, для которого $z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$. Найдём пересечение поверхностей $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$:

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}.$$

Перейдём к обобщённой полярной системе координат:

$$x=a\rho\cos\varphi, \qquad y=b\rho\sin\varphi, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=ab\rho.$$

Искомый объём равен

$$V=4V_1=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{1/\sqrt{2}}c(\sqrt{1-\rho^2}-\rho)\cdot ab\rho\,d\rho.$$

Вычислим интеграл:

$$V=2\pi abc\int_0^{1/\sqrt{2}}(\rho\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2)\,d\rho=2\pi abc\left(-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{3/2}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}}=$$

$$=2\pi abc\left(-\frac{1}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi abc}{3}(2-\sqrt{2}).$$

Ответ: $\dfrac{\pi abc}{3}(2-\sqrt{2})$.

$\boxed{\text{A1}}$ Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz,$$

где V — тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Решение. Тетраэдр V задан следующими условиями:

$$V: \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad 2x + y + z \leqslant 6.$$

Для любой допустимой точки (x, y) координата z изменяется от 0 до $6-2x-y$. Значит, для x и y получается система

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad 2x + y \leqslant 6.$$

Для любого допустимого значения x координата y изменяется от 0 до $6-2x$. Значит, x изменяется от 0 до 3.

$$I = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{6-2x} dy \int\limits_0^{6-2x-y} x\,dz =$$

$$= \int\limits_0^3 x\,dx \int\limits_0^{6-2x} (6 - 2x - y)\,dy = \int\limits_0^3 x \cdot \left(6y - 2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{6-2x} dx =$$

$$= \int\limits_0^3 x(36 - 12x - 12x + 4x^2 - (18 - 12x + 2x^2))dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (2x^3 - 12x^2 + 18x)dx = \left(\frac{x^4}{2} - 4x^3 + 9x^2\right)\Bigg|_0^3 = \frac{81}{2} - 108 + 81 = \frac{27}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{27}{2}$.

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить якобиан перехода к цилиндрической системе координат:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z.$$

Решение.

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

$\boxed{\text{Д 4080}}$ Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2$ и $z=1$.

Решение. Перейдём к цилиндрическим координатам. Уравнения поверхностей:

$$z=\pm\rho, \qquad z=1.$$

Отсюда $\rho \leqslant z \leqslant 1$. Следовательно, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Геометрически это означает, что для любого вертикального луча, пересекающего единичный круг на плоскости Oxy, области V принадлежит отрезок от пересечения с верхней частью конуса $z=\rho$ до пересечения с горизонтальной плоскостью $z=1$.

$$I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_\rho^1 \rho\cdot\rho\,dz.$$

Вычислим интеграл:

$$I=2\pi\int\limits_0^1(\rho^2-\rho^3)\,d\rho=2\pi\left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=2\pi\cdot\frac{1}{12}=\frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$.

$\boxed{\text{А3}}$ Вычислить якобиан перехода к сферической системе координат:

$$x=\rho\cos\varphi\cos\psi, \qquad y=\rho\sin\varphi\cos\psi, \qquad z=\rho\sin\psi.$$

Решение.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\rho\sin\varphi\cos\psi & -\rho\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & \rho\cos\varphi\cos\psi & -\rho\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & \rho\cos\psi \end{vmatrix}.$$

Вынесем множители из столбцов, затем разложим по третьей строке:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\psi)} = \rho^2\cos\psi \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\cos\psi\left(\sin\psi \begin{vmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \cos\psi \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \rho^2\cos\psi(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = \rho^2\cos\psi.$$

Ответ: $\rho^2\cos\psi$.

$\boxed{\text{Д 4088}}$ Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz.$$

Решение. Запишем неравенства, которые задают область интегрирования:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}, \qquad \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}.$$

Условия $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ равносильны следующим условиям для сферических координат:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Кроме этого, получим следующие условия:

$$\rho\cos\varphi\cos\psi \leqslant 1, \qquad \rho^2\cos^2\psi \leqslant 1, \qquad \cos\psi \leqslant \sin\psi, \qquad \rho^2 \leqslant 2.$$

Первое условие следует из второго; третье означает, что $\psi \geqslant \frac{\pi}{4}$. При этом $\cos^2\psi \leqslant \frac{1}{2}$, так что второе условие следует из четвёртого. Итак, область интегрирования задана следующими условиями в сферических координатах:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}.$$

Искомый интеграл равен

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\psi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (\rho^2\sin^2\psi)\cdot(\rho^2\cos\psi)d\rho.$$

Вычислим интеграл:

$$I = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2\psi\cos\psi\,d\psi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^4 d\rho = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} t^2\,dt\cdot\frac{(\sqrt{2})^5}{5} =$$

$$= \frac{\pi\cdot 4\sqrt{2}}{30}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

$\boxed{\text{Д 4092}}$ Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$.

Решение. Сделаем замену переменных:

$$\xi = \frac{z}{x},\quad \eta = \frac{z}{y^2},\quad \zeta = z \qquad\Longrightarrow\qquad x = \zeta\xi^{-1},\quad y = \zeta^{1/2}\eta^{-1/2},\quad z = \zeta.$$

В новых координатах область интегрирования задана условиями

$$\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta,\qquad a \leqslant \eta \leqslant b,\qquad 0 \leqslant \zeta \leqslant h.$$

Вычислим якобиан:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{vmatrix} -\xi^{-2}\zeta & 0 & \xi^{-1} \\ 0 & -\frac{1}{2}\eta^{-3/2}\zeta^{1/2} & \frac{1}{2}\eta^{-1/2}\zeta^{-1/2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\xi^{-2}\eta^{-3/2}\zeta^{3/2}.$$

Получим следующий интеграл:

$$I = \int\limits_\alpha^\beta d\xi\int\limits_a^b d\eta\int\limits_0^h \frac{\zeta^2}{\xi^2}\cdot\frac{\zeta^{3/2}}{\xi^2\eta^{3/2}}d\zeta.$$

Вычислим интеграл:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta\frac{d\xi}{\xi^4}\int\limits_a^b\frac{d\eta}{\eta^{3/2}}\int\limits_0^h\zeta^{7/2}d\zeta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\cdot\frac{2}{9}h^{9/2}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{27}\left(\dfrac{1}{\alpha^3}-\dfrac{1}{\beta^3}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$.