14-е занятие. Тройные интегралы
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Повторение

$\boxed{\text{А1}}$ В следующем интеграле перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке:

$$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1}^{0} f(x,y)\,dy.$$

Тройные интегралы

$\boxed{\text{Д 4092}}$ Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$.

$\boxed{\text{Д 4081}}$ Различными способами расставить пределы интегрирования в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} dy \int\limits_{0}^{x+y} f(x,y,z)\,dz.$$

$\boxed{\text{А2}}$ Вывести формулу для объёма шара радиуса R.

$\boxed{\text{Д 4094}}$ Найти среднее значение функции

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

в области $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z$.

Домашнее задание № 14
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{А1}}$ В следующем интеграле перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{1} f(x,y)\,dy.$$

$\boxed{\text{Д 4087}}$ Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где область V ограничена поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$.

Различными способами расставить пределы интегрирования в следующих тройных интегралах:

$\boxed{\text{Д 4082}}$ $$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz.$$

$\boxed{\text{Д 4083}}$ $$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz.$$

$\boxed{\text{Д 4090}}$ Произведя соответствующую замену переменных, вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

где V — внутренность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

$\boxed{4093}$ Найти интеграл $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, где область V расположена в октанте $x>0$, $y>0$, $z>0$ и ограничена поверхностями:

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\quad z=\frac{x^2+y^2}{n},\quad xy=a^2,\quad xy=b^2,\quad y=\alpha x,\quad y=\beta x$$

$(0<a<b;\quad 0<\alpha<\beta;\quad 0<m<n)$.

Конспект 14-го занятия.
Тройные интегралы
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ В следующем интеграле перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке:

$$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1}^{0} f(x, y)\, dy.$$

Решение. Для решения этой задачи нужно сделать рисунок. Из рисунка видно, что φ изменяется от $-\pi$ до $-\pi/2$. При этом мы учли границы $x = 0$ и $y = 0$. Запишем уравнения двух оставшихся границ в полярных координатах:

$$\begin{aligned} x &= -1: & \qquad \rho\cos\varphi &= -1; \\ y &= -1: & \qquad \rho\sin\varphi &= -1. \end{aligned}$$

Проводим различные лучи из начала координат. Если $\varphi \in [-\pi, -3\pi/4]$, то области интегрирования принадлежат отрезки лучей от начала координат до пересечения с прямой $x = -1$; если $\varphi \in [-3\pi/4, -\pi/2]$, то области интегрирования принадлежат отрезки лучей от начала координат до пересечения с прямой $y = -1$.

$$I = \int\limits_{-\pi}^{-3\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{-1/\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho + \int\limits_{-3\pi/4}^{-\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{-1/\sin\varphi} f(\ldots)\rho\, d\rho.$$

Теперь нужно записать двойной интеграл с внешним интегралом по ρ. Проводим окружности с центром в начале координат различных радиусов ρ. Если $\rho \in [0, 1]$, то области интегрирования принадлежит дуга окружности от пересечения с лучом $y = 0$ ($x < 0$) до пересечения с лучом $x = 0$ ($y < 0$), что соответствует углам от $-\pi$ до $-\pi/2$. Если $\rho \in [1, \sqrt{2}]$, то области интегрирования принадлежит дуга окружности от пересечения с прямой $x = -1$ до пересечения с прямой $y = -1$, что соответствует углам от $\varphi_1 = \arccos(1/\rho) - \pi$ до $\varphi_2 = \arcsin(1/\rho) - \pi$. Итак,

$$I = \int\limits_{0}^{1} \rho\, d\rho \int\limits_{0}^{\pi/4} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \rho\, d\rho \int\limits_{\arccos(1/\rho)-\pi}^{\arcsin(1/\rho)-\pi} f(\ldots)\, d\varphi.$$

$\boxed{\text{Д } 4092}$ Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$.

Решение. Сделаем замену переменных:

$$\xi = \frac{z}{x}, \quad \eta = \frac{z}{y^2}, \quad \zeta = z \qquad \Longrightarrow \qquad x = \zeta\xi^{-1}, \quad y = \zeta^{1/2}\eta^{-1/2}, \quad z = \zeta.$$

В новых координатах область интегрирования задана условиями

$$\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta, \qquad a \leqslant \eta \leqslant b, \qquad 0 \leqslant \zeta \leqslant h.$$

Вычислим якобиан:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{vmatrix} -\xi^{-2}\zeta & 0 & \xi^{-1} \\ 0 & -\frac{1}{2}\eta^{-3/2}\zeta^{1/2} & \frac{1}{2}\eta^{-1/2}\zeta^{-1/2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\xi^{-2}\eta^{-3/2}\zeta^{3/2}.$$

Получим следующий интеграл:

$$I = \int\limits_\alpha^\beta d\xi \int\limits_a^b d\eta \int\limits_0^h \frac{\zeta^2}{\xi^2} \cdot \frac{\zeta^{3/2}}{\xi^2\eta^{3/2}} d\zeta.$$

Вычислим интеграл:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \frac{d\xi}{\xi^4}\int\limits_a^b \frac{d\eta}{\eta^{3/2}}\int\limits_0^h \zeta^{7/2}d\zeta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}\right)\cdot\frac{2}{9}h^{9/2}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{27}\left(\dfrac{1}{\alpha^3} - \dfrac{1}{\beta^3}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}.$

$\boxed{\text{Д } 4081}$ Различными способами расставить пределы интегрирования в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz.$$

Решение. Запишем условия на переменные x, y, z:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant 1 - x \leqslant y, \qquad 0 \leqslant z \leqslant x + y.$$

Другая форма второго условия:

$$y \geqslant 0, \qquad x + y \leqslant 1.$$

Отсюда видно, что при любом x из $[0, 1]$ величина $x + y$ изменяется от 0 до 1, поэтому z также изменяется от 0 до 1.

Вывод: (x, y) пробегает квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. При фиксированных x и z получаем следующую систему для y:

$$\begin{cases} y \geqslant 0; \\ y \geqslant z - x; \\ y \leqslant 1 - x. \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max(0, z - x) \leqslant y \leqslant 1 - x.$$

Будем брать внешний интеграл по x. Если $z \leqslant x$, т. е. $z - x \leqslant 0$, то y изменяется от 0 до $1 - x$. Если $z \geqslant x$, т. е. $z - x \geqslant 0$, то y изменяется от $z - x$ до $1 - x$.

$$I = \int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^x dz \int\limits_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x, y, z)\, dy \right).$$

Теперь будем брать внешний интеграл по z. Если $x \leqslant z$, т. е. $z - x \geqslant 0$, то y изменяется от $z - x$ до $1 - x$. Если $x \geqslant z$, т. е. $z - x \leqslant 0$, то y изменяется от 0 до $1 - x$.

$$I = \int\limits_0^1 dz \left(\int\limits_0^z dx \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x, y, z)\, dy + \int\limits_z^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy \right).$$

$\boxed{\text{А2}}$ Вывести формулу для объёма шара радиуса R.

Решение. Введём декартову систему координат, в которой шар задаётся условием

$$V\colon x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2.$$

Затем перейдём к сферической системе координат. Для сферических координат получаем условия

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant R.$$

Напомним якобиан сферической системы:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \psi)} = \rho^2 \cos\psi.$$

Вычисляем объём как интеграл от единичной функции:

$$\mu(V) = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos d\psi \int\limits_0^R \rho^2\,d\rho = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi}{3} R^3$.

Д 4094 Найти среднее значение функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

в области V: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z$.

Решение. Нужно найти величину

$$\frac{1}{\mu(V)} \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Выделим полные квадраты в неравенстве, которое задаёт V:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{4}.$$

Отсюда видно, что V есть шар с центром $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ радиуса $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Его объём равен

$$\mu(V) = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

Осталось найти интеграл. Перейдём к сферическим координатам с центром в точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$x = \frac{1}{2} + \rho\cos\varphi\cos\psi, \qquad y = \frac{1}{2} + \rho\sin\varphi\cos\psi, \qquad z = \frac{1}{2} + \rho\sin\psi.$$

Область интегрирования в новых координатах:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Преобразуем функцию f:

$$f(x,y,z) = \frac{3}{4} + \rho(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi) + \rho^2.$$

Выгодно брать внутренний интеграл по φ:

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} d\rho \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}\rho^2\cos\psi + \rho^4\cos\psi + \right.$$

$$\left. + \rho^3(\cos\varphi + \sin\varphi)\cos^2\psi + \rho^3\cos\psi\sin\psi\right) d\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} d\rho \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3}{4}\rho^2\cos\psi + \rho^4\cos\psi + \rho^3\cos\psi\sin\psi\right) d\psi =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{3}{4}\rho^2 + \rho^4\right) d\rho = 4\pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{32} + \frac{9\sqrt{3}}{5\cdot 32}\right) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{5}.$$

Среднее значение: $E[f] = \dfrac{3\pi\sqrt{3}}{5} \cdot \dfrac{2}{\pi\sqrt{3}} = \dfrac{6}{5}$.

Ответ: $\dfrac{6}{5}$.