15-е занятие. Вычисление объёмов с помощью тройных интегралов Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{К 133, 5)}}$ В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz. \qquad (x;z;y).$$

Объём области G ($G \subset \mathbb{R}^3$) выражается формулой

$$\boxed{V = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz.}$$

Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями

$\boxed{\text{Д 4101}}$ $z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad y = x^2.$

$\boxed{\text{Д 4102}}$ $z = x + y, \quad z = xy, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объёмы, ограниченные поверхностями:

$\boxed{\text{Д 4107}}$ Найти объём тела ограниченного следующими поверхностями (перейти к цилиндрическим или сферическим координатам):

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 \leqslant z^2.$$

В некоторых примерах удобно пользоваться обобщёнными сферическими координатами ρ, φ, ψ:

$$\boxed{x = a\rho\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad y = b\rho\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad z = c\rho\sin^\beta\psi.}$$

При этом

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\psi)} = \alpha\beta abc\rho^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

При помощи подходящей замены переменных вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$\boxed{\text{Д 4118}}$ $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0).$

$\boxed{\text{Д 4120}}$ $x^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (x > 0).$

Домашнее задание № 15
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{К 133, 1)}}$ В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{0}^{h} f(x,y,z)\, dz. \qquad (z,y,x).$$

Вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$\boxed{\text{Д 4103}}$ $x^2+z^2=a^2, \quad x+y=\pm a, \quad x-y=\pm a.$

$\boxed{\text{Д 4104}}$ $az=x^2+y^2, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$

$\boxed{\text{Д 4106}}$ $z=6-x^2-y^2, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объёмы, ограниченные поверхностями:

$\boxed{\text{Д 4108}}$ $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$

$\boxed{\text{Д 4110}}$ $x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2+z^2=b^2, \quad x^2+y^2=z^2 \quad (z \geqslant 0, 0<a<b).$

При помощи подходящей замены переменных вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$\boxed{\text{Д 4112}}$ $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$

$\boxed{\text{Д 4118.2}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{z}{c}}=1 \quad (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0).$

$\boxed{\text{Д 4119}}$ $z=x^2+y^2, \quad z=2(x^2+y^2), \quad xy=a^2, \quad xy=2a^2, \quad x=2y, 2x=y \quad (x>0, \quad y>0).$

Конспект 15-го занятия.
Вычисление объёмов с помощью тройных интегралов
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{К 133, 5)}}$ В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz. \qquad (x;z;y).$$

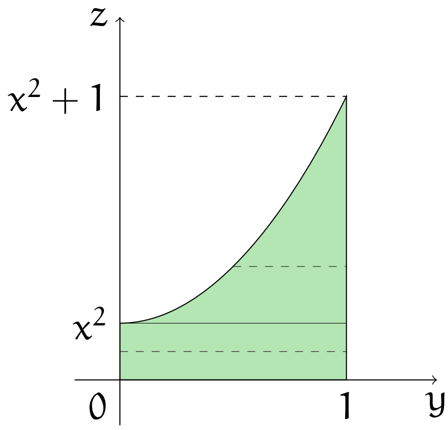
Решение. Область интегрирования задана следующей системой неравенств:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2.$$

Если число x фиксировано, то для z и y получаем систему неравенств

$$0 \leqslant y \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2.$$

Выбрав какое-нибудь число x из $[0,1]$, изобразим на рисунке соответствующую область изменения y и z:



Из рисунка понятно, что если $z \in [0, x^2]$, то $y \in [0,1]$. Если же $z \in [x^2, x^2+1]$, то $y \in [\sqrt{z-x^2}, 1]$.

Ответ: $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x,y,z)\,dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy.$

$\boxed{\text{Д 4101}}$ Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z = x^2+y^2, \quad z = 2x^2+2y^2, \quad y = x, \quad y = x^2.$$

Решение. Очевидно, при любых значениях x и y выполняется неравенство $x^2+y^2 \leqslant 2x^2+2y^2$, поэтому при фиксированных x и y координата z изменяется от x^2+y^2 до $2x^2+2y^2$. Сделав рисунок в плоскости Oxy, легко понять, что x изменяется от 0 до 1, и для каждого значения x координата y изменяется от x^2 до x.

$$V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{6}{21} - \frac{1}{5} = \frac{10-7}{7\cdot 5} = \frac{3}{35}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{35}$.

$\boxed{\text{Д } 4102}$ Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z = x+y, \quad z = xy, \quad x+y=1, \quad x=0, \quad y=0.$$

Решение. Линии $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ ограничивают треугольник в плоскости Oxy. Этот треугольник можно описать следующими неравенствами:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1-x.$$

Заметим, что при этом $xy \leqslant y \leqslant x+y$. Значит, для любой пары (x,y) координата z изменяется от xy до $x+y$.

$$V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_{xy}^{x+y} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y-xy)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(xy + (1-x)\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left(x - x^2 + \frac{(1-x)^3}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{(1-x)^4}{8} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \frac{7}{24}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{24}$.

$\boxed{\text{Д 4107}}$ Найти объём тела ограниченного следующими поверхностями (перейти к цилиндрическим или сферическим координатам):

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 \leqslant z^2.$$

Решение. Перейдём к сферическим координатам:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\psi, \quad y = \rho\sin\varphi\cos\psi, \quad z = \rho\sin\psi, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\psi)} = \rho^2\cos\psi.$$

Условия, определяющие тело, принимают следующий вид:

$$\rho = 2a\sin\psi, \qquad \cos^2\psi \leqslant \sin^2\psi.$$

Из первого условия следует, что нужно рассматривать $\psi \geqslant 0$. Теперь из второго следует, что

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

Можно ещё нарисовать разрез тела плоскостью Oxz.

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\psi \int_0^{2a\sin\psi} \rho^2\cos\psi\,d\rho = 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{8a^3\sin^3\psi}{3}\cos\psi\,d\psi =$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3\psi\cos\psi\,d\psi = \left[\begin{array}{c} t = \sin\psi \\ dt = \cos\psi\,d\psi \end{array}\right] =$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3}\int_{\sqrt{2}/2}^{1} t^3\,dt = \frac{4\pi a^3}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \pi a^3.$$

Ответ: πa^3.

В некоторых примерах удобно пользоваться обобщёнными сферическими координатами ρ, φ, ψ:

$$\boxed{x = a\rho\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad y = b\rho\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad z = c\rho\sin^\beta\psi.}$$

При этом

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\psi)} = \alpha\beta abc\rho^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

$\boxed{\text{Д } 4118}$ $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2=1 \quad (x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0).$

Решение. Здесь удобно перейти к обобщённым сферическим координатам:

$$x = a\cos^2\varphi\cos\psi, \quad y = b\sin^2\varphi\cos\psi, \quad z = c\sin\psi.$$

Якобиан равен

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\psi)} = 2abc\rho^2\cos\varphi\cos\psi.$$

В новых координатах уравнение границы имеет вид $\rho = 1$.

$$V = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\psi \int\limits_0^1 2abc\rho^2\cos\varphi\cos\psi\, d\rho =$$

$$= 2abc\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\psi\, d\psi\int\limits_0^1\rho^2\, d\rho = \frac{2abc}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2abc}{3}$.

$\boxed{\text{Д } 4120}$ $x^2+z^2=a^2, \quad x^2+z^2=b^2, \quad x^2-y^2-z^2=0 \quad (x>0).$

Решение. Здесь удобно сделать цилиндрическую замену, заменив x и z на полярные координаты:

$$x=\rho\cos\varphi, \quad z=\rho\sin\varphi, \quad y=y, \quad \frac{\partial(x,z,y)}{\partial(\rho,\varphi,y)}=\rho.$$

Из условия $x>0$ следует, что $\varphi\in(-\pi/2,\pi/2)$. В новых координатах уравнения границ принимают вид $\rho=a$, $\rho=b$ и $y^2=\rho^2\cos 2\varphi$. Из условия $\cos 2\varphi\geqslant 0$ получаем $\varphi\in[-\pi/4,\pi/4]$. Воспользуемся симметрией по y и по φ:

$$V = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi\int\limits_a^b d\rho\int\limits_0^{\rho\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\, dy = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi\int\limits_a^b \rho^2\sqrt{\cos 2\varphi}\, d\rho =$$

$$= \frac{4}{3}\left(b^3-a^3\right)\int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\varphi}\, d\varphi.$$

Оставшийся интеграл можно выразить через интегралы Эйлера (B- или Γ-функции).