17-е занятие. Норма-супремум.
Равномерная сходимость функциональных послед.
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Норма-супремум функции $f\colon X \to \mathbb{C}$ определяется следующей формулой:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Для краткости, будем называть супремум-норму просто *нормой* и обозначать через $\|f\|$. Отметим два важных свойства:
1) $\|f\| \leqslant \varepsilon \quad \iff \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$;
2) $\forall x \in X \quad \|f\| \geqslant |f(x)|$.

Найти нормы следующих функций:

$\boxed{\text{А1}}$ $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad x \geqslant 1.$ $\qquad$ $\boxed{\text{А2}}$ $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{А3}}$ $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$ $\qquad$ $\boxed{\text{А4}}$ $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{Д 2741}}$ Пусть функции f_n ($n \in \mathbb{N}$) и f определены на X. Доказать, что следующие условия равносильны:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$;

(b) $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Напомним важный факт, который был доказан на лекции:

$\boxed{\text{Т1}}$ Если $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ и все функции f_n непрерывны на X, то функция f тоже непрерывна на X.

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

$\boxed{\text{Д 2755а}}$ $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}; \quad x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{Д 2755б}}$ $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}; \quad x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{А5}}$ $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}; \quad x \geqslant 0.$

$\boxed{\text{Д 2746}}$ $f_n(x) = x^n$; а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Д 2747}}$ $f_n(x) = x^n - x^{n+1}; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

$\boxed{\text{Д 2754}}$ $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right); \quad 0 < x < +\infty.$

Домашнее задание № 17
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Найти нормы следующих функций:

$\boxed{\text{Д 1437}}$ $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Д 1441}}$ $f(x) = \dfrac{10}{1+\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Д 1445}}$ $f(x) = 2^x$, $x \in [-1, 5]$. $\boxed{\text{Д 1449}}$ $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $x \in [-1, 1]$.

$\boxed{\text{Д 1448}}$ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \in [0.01, 100]$.

$\boxed{\text{Д 1452}}$ $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $x \in (0, +\infty)$.

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

$\boxed{\text{Д 2749}}$ $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$; $x > 0$.

$\boxed{\text{Д 2750}}$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Д 2752аб}}$ $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$; а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $1 < x < +\infty$.

$\boxed{\text{Д 2753}}$ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$; $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Д 2756а}}$ $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$; $x > 0$.

$\boxed{\text{Д 2756б}}$ $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$; $x > 0$. (Этот пример чуть сложнее других.)

$\boxed{\text{Д 2762}}$ $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$; $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Дополнительные задания

$\boxed{\text{А1}}$ Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Найти $\sup\{|x|\colon x \in [\alpha, \beta]\}$.

$\boxed{\text{А2}}$ Пусть $f_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \ldots + a_{n,d}x^d$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_dx^d$ — многочлены степени не выше d, причём $a_{n,k} \to b_k$ для каждого k $(0 \leqslant k \leqslant d)$. Доказать, что $f_n \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} g$ на любом конечном сегменте $[\alpha, \beta]$

$\boxed{\text{Д 2765}}$ Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и $f_n(x) = n\left(f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$. Доказать, что $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, где $a < \alpha < \beta < b$.

Конспект 17-го занятия.
Норма-супремум. Равномерная сходимость функциональных последовательностей
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Норма-супремум функции $f\colon X \to \mathbb{C}$ определяется следующей формулой:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Для краткости, будем называть норму-супремум просто *нормой* и обозначать через $\|f\|$. Отметим два важных свойства этой нормы:
1) $\|f\| \leqslant \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$;
2) $\forall x \in X \quad \|f\| \geqslant |f(x)|$.

Для краткости, будем называть супремум-норму просто *нормой* и обозначать через $\|f\|$.

Найти нормы следующих функций:

$\boxed{\text{A1}}$ $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad x \geqslant 1.$

Решение. Заметим, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 1$. Поэтому $\|f\| = \sup_{x\geqslant 0} f(x)$. Находим производную:

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Отсюда видно, что e^2 — точка максимума, и $\|f\| = f(e^2) = \frac{2}{e}$.

$\boxed{\text{A2}}$ $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. Заметим, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$ и $f(-x) = -f(x)$ при $x \geqslant 0$. Поэтому

$$\|f\| = \sup_{x\geqslant 0} f(x).$$

Найдём производную функции f:

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

Отсюда понятно, что максимум достигается при $x = 1$:

$$\|f\| = f(1) = \frac{2}{2} = 1.$$

Другой способ решения. С одной стороны, из неравенства $(|x|-1)^2 \geqslant 0$ следует, что $2|x| \leqslant 1+x^2$, поэтому $\|f\| \leqslant 1$. С другой стороны, $f(1) = 1$, поэтому $\|f\| \geqslant 1$. Поэтому $\|f\| = 1$. При этом способе решения точку $x = 1$ нужно угадать.

$\boxed{\text{A3}}$ $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. Первый способ. Известно, что множество значений arctg есть $(-\pi/2, \pi/2)$. Отсюда $\|f\| = \pi/2$.

Второй способ. Функция нечётная, поэтому

$$\|f\| = \sup_{x \geqslant 0} |\operatorname{arctg} x| = \sup_{x \geqslant 0} \operatorname{arctg} x.$$

Поскольку arctg возрастает, то $\|f\| = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{A4}}$ $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. Сначала выведем формулу для $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a$, где $a \geqslant 0$. Поскольку $\operatorname{tg}(\pi/2 - \operatorname{arctg} a) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = 1/a$ и $\pi/2 - \operatorname{arctg} a \in (-\pi/2, \pi/2)$, то

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} \frac{1}{a} \qquad (a \geqslant 0).}$$

Возвращаемся к нашей задаче:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x^2}.$$

Функция чётная, при $x \geqslant 0$ убывает. Поэтому $\|f\| = f(0) = \frac{\pi}{4}$.

$\boxed{\text{Д 2741}}$ Пусть функции f_n $(n \in \mathbb{N})$ и f определены на X. Доказать, что следующие условия равносильны:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$;

(b) $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Решение. Распишем условие (b):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Понятно, что последнее строгое неравенство можно заменить нестрогим. По свойства супремума, неравенство $\|g\| \leqslant \varepsilon$ равносильно тому, что $|g(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех x из X. Таким образом, условие (b) равносильно следующему:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n - f| \leqslant \varepsilon.$$

Понятно, что последнее нестрогое неравенство можно заменить на строгое. Полученное соотношение совпадает с (a).

Напомним важный факт, который был доказан на лекции:

$\boxed{\text{T1}}$ Если $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ и все функции f_n непрерывны на X, то функция f тоже непрерывна на X.

Исследование функциональной последовательности на равномерную сходимость

Схема исследования ф. п. на равномерную сходимость:

1. Мысленно зафиксировать произвольную точку x и перейти к пределу при $n \to \infty$. Предельную величину (которая может зависеть от x) обозначить через $g(x)$. Это поточечный предел. Если нет поточечной сходимости (не существует поточечный предел), то нет и равномерной сходимости.

2. Рассмотреть функцию $r_n(x) = f_n(x) - g(x)$. Найти $\|r_n\|$. Для этого мысленно зафиксировать произвольное n и найти супремум величины $|r_n(x)|$, когда x пробегает X.

3. Выяснить, стремится ли $\|r_n\|$ к 0 при $n \to \infty$.

$\boxed{\text{Д 2755а}}$ $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}; \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. Сначала мысленно фиксируем произвольную точку x и переходим к пределу при $n \to \infty$. Числитель ограничен, поэтому предел равен 0. Предельная функция g — тождественный нуль: $g \equiv 0$, $r_n = f_n - g = f_n$.

$$\|f_n\| = \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin nx|}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Сходится равномерно.

$\boxed{\text{Д 2755б}}$ $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}; \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. $f_n(x) \to g(x) \equiv 0$ при любом x из $\mathbb{R}$. Чтобы исследовать на равномерную сходимость, найдём $\|r_n\| = \|f_n - g\| = \|f_n\|$. Заметим, что $|f_n(x)| \leqslant 1$ при всех x из $\mathbb{R}$ и $|f_n(x)| = 1$ при $x = \frac{n\pi}{2}$. Поэтому $\|f_n\| = 1$, сходится неравномерно.

$\boxed{\text{А5}}$ $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}, \qquad x \geqslant 0.$

Решение. $f_n(x) \to 0$ при любом $x \geqslant 0$. Чтобы исследовать на равномерную сходимость, рассмотрим $\|f_n\| = \|f_n - 0\|$.

1-й способ. Вычислив производную или представив f_n в виде

$$f_n(x) = \frac{x+n-n}{x+n} = 1 - \frac{n}{x+n},$$

легко показать, что f_n возрастает. Поэтому $\|f_n\| = f_n(+\infty) = 1$. Сходится неравномерно.

2-й способ. $\|f_n\| \geqslant f_n(n) = \frac{1}{2}$. Сходится неравномерно.

$\boxed{\text{Д 2746}}$ $f_n(x) = x^n$; а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. а) Поскольку $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, то $x^n \to 0$. Таким образом, предельная функция g есть тождественный нуль. Чтобы исследовать на равномерную сходимость, находим норму разности $\|f_n - g\|$:

$$\|f_n - g\| = \|f_n\| = f_n(1/2) = \frac{1}{2^n} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad f \overset{[0,1/2]}{\rightrightarrows} 0.$$

б) Сначала исследуем на поточечную сходимость: $x^n \to 0$ при $0 \leqslant x < 1$, $x^n \to 1$ при $x = 1$. Предельная функция:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Чтобы исследовать на равномерную сходимость, можно найти норму разности:

$$\|f_n - g\| = \sup_{0 \leqslant x < 1} x^n = 1 \not\to 0.$$

Другой способ: функции f_n равномерно непрерывны на $[0, 1]$, а функция g разрывна. Поэтому равномерной сходимости быть не может.

$\boxed{\text{Д 2747}}$ $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. Сначала исследуем на поточечную сходимость: $f_n(x) \to 0$ при $x0 \leqslant x < 1$, $f_n(x) = 0 \to 0$ при $x = 1$. Таким образом, предельная функция нулевая. Чтобы найти $\|f_n|$, используем производную:

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = (n+1)x^{n-1}\left(\frac{n-1}{n+1} - x\right).$$

Отсюда

$$\|f_n\| = f_n\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{2}{n+1}.$$

Из второго замечательного предела следует, что первый сомножитель стремится к e^2. Поэтому $\|f_n\| \to 0$, сходится неравномерно.

$\boxed{\text{Д 2754}}$ $\quad f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right); \quad 0 < x < +\infty.$

Решение. Сначала найдём поточечный предел (x фиксировано, $n \to \infty$):

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Рассмотрим $|r_n(x)|$, где $r_n(x) = f_n(x) - g(x)$:

$$|r_n(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{\left|\sqrt{x} - \sqrt{x+\frac{1}{n}}\right|}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \frac{1/n}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2}.$$

Полученная функция положительна и убывает.

$$\|r_n\| = \lim_{x\to 0} r_n(x) = +\infty.$$

Сходится неравномерно.