18-е занятие. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Исследовать следующие ряды на равномерную сходимость с помощью определения:

$\boxed{\text{Д 2767}}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ а) на интервале $|x| < q$, где $q < 1$; б) на интервале $|x| < 1$.

$\boxed{\text{А1}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+(2n-1))(x+(2n+1))}, \quad x > 0.$

Признак Вейерштрасса. Если $|f_n(x)| \leqslant a_n$ для любого $x \in X$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится.

$\boxed{\text{Д 2768}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}, \quad x \in [-1; 1].$ $\boxed{\text{Д 2774 а}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{А2}}$ Доказать, что $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ при любых $a, b \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Д 2774 г}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{А3}}$ Доказать, что $|\operatorname{arctg} t| \leqslant |t|$ при любых t из $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{А4}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{nx}{x^2+n^6}.$

$\boxed{\text{Д 2774 д}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2.$

$\boxed{\text{А5}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}, \quad x > 0.$

Признак Лейбница для функциональных рядов. Пусть при каждом x из X последовательность $f_n(x)$ убывает (по n) и сходится к 0, и пусть $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$ сходится равномерно.

$\boxed{\text{А6}}$ Исследовать ряд на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Домашнее задание № 18
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Исследовать ряды на равномерную сходимость, используя определение (вычислить частичную сумм и суммы ряда, рассмотреть норму остатка ряда):

Д 2769 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Д 2770 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right); \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

Д 2772 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}; \quad x > 0.$

Д 2771 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}; \quad x > 0.$

А1 Доказать, что $\ln(1+t) < t$ при любом $t > 0$. Указание: исследовать на монотонность функцию $g(t) = t - \ln(1+t)$.

Д 2774 Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

б $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}, \quad x > -2.$ в $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}, \quad x \geqslant 0.$

ж $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, \quad x \in \mathbb{R}.$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$

м $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$ л $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}, \quad x \geqslant 0.$

з $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$ к $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right), \quad |x| < a.$

Д 2777 Исследовать ряд на равномерную сходимость: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}, \quad x > 0.$

Повторить признаки Абеля и Дирихле!

А2 (Дополнительная задача для желающих.) Пусть функция f бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, g_n — последовательность её производных: $g_n(x) = f^{(n)}(x)$. Известно, что ф. п. g_n равномерно сходится на любом сегменте к некоторой функции h. Выяснить, какой вид тогда обязана иметь функция h.

Конспект 18-го занятия.
Равномерная сходимость функциональных рядов.
Признак Вейерштрасса
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Исследование функционального ряда на равномерную сходимость с помощью определения

Рассматривается ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ на множестве $x \in X$. Нужно исследовать его на равномерную сходимость, используя определение. План решения:

1. Для любых x из X и k из $\mathbb{N}$ вычислить частичную сумму:
$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x).$$

2. При произвольном фиксированном x из X вычислить предел $S_k(x)$ при $k \to \infty$, обозначить через $S(x)$. Это сумма ряда. Если $S_k(x)$ не имеет предела, то ряд не сходится даже поточечно.

3. Рассмотреть остаток ряда: $R_k(x) = S(x) - S_k(x)$. При произвольном фиксированном k из $\mathbb{N}$ вычислить
$$\|R_k\| = \sup_{x \in X} |R_k(x)|.$$

4. Исследовать числовую последовательность $\|R_k\|$ на стремление к нулю. Если $\|R_k\| \to 0$, то ряд сходится равномерно: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, иначе ряд не сходится равномерно.

$\boxed{\text{Д 2767}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ а) на интервале $|x| < q$, где $q < 1$; б) на интервале $|x| < 1$.

Решение. Вычисляем частичную сумму ряда, пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии:
$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$

Фиксируя x и переходя к пределу при $k \to \infty$, находим сумму ряда:
$$S(x) = \lim_{k \to \infty} S_k(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Получили известную из школы формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Теперь рассматриваем остаток («хвост») ряда:

$$R_k(x) = S(x) - S_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x).$$

В нашем случае,

$$R_k(x) = \frac{x^{k+1}}{1-x}.$$

Чтобы исследовать на равномерную сходимость, находим норму R_k и смотрим, стремится ли она к нулю.

а) Если $|x| < q$, где $q < 1$, то $\|R_k\| = \frac{q^{k+1}}{1-q} \to 0$. Сходится равномерно.

б) Если $|x| < 1$, то $\|R_k\| = +\infty$. Сходится неравномерно. □

$\boxed{\text{А1}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+(2n-1))(x+(2n+1))}, \quad x > 0.$

Решение. Заметим, что

$$f_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+(2n-1)} - \frac{1}{x+(2n+1)}\right).$$

Складывая по n от 1 до k, получим:

$$S_k(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+(2k+1)}\right).$$

Отсюда

$$S(x) = \frac{1}{2(x+1)}, \qquad R_k(x) = \frac{1}{2(x+(2k+1))}.$$

При любом k величина R_k убывает по x, поэтому

$$\|R_k\| = \sup_{x>0} R_k(x) = \lim_{x\to 0} R_k(x) = \frac{1}{2(2k+1)}.$$

$\|R_k\| \to 0$, ряд сходится равномерно. □

Доказательство равномерной сходимости с помощью признака Вейерштрасса

Признак Вейерштрасса. Если $|f_n(x)| \leqslant a_n$ для любого $x \in X$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится.

Распространённая ошибка: путают условие «ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится» с условием «последовательность a_n сходится». Последнего условия, конечно, недостаточно для сходимости функционального ряда.

Итак, для применения признака Вейерштрасса нужно оценить $|f_n(x)|$ сверху через a_n, где a_n не зависит от x, причём числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Заметим, что следующие условия равносильны:

(i) существует такая последовательность a_n, что $|f_n(x)| \leqslant a_n$ для каждого x из X и каждого n из $\mathbb{N}$, причём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

(ii) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ сходится.

Импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) получается из признака сравнения, а для доказательства импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) достаточно положить $a_n = \|f_n\|$. Таким образом, признак Вейерштрасса можно сформулировать по-другому:

Признак Вейерштрасса. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится.

$\boxed{\text{Д 2768}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad x \in [-1; 1].$

Решение. Заметим, что

$$\frac{|x^n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall x \in [-1, 1],$$

а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. По признаку Вейерштрасса, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно. □

$\boxed{\text{Д 2774 а}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{x^2 + n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно. □

Для применения признака Вейерштрасса нужно знать некоторые неравенства.

$\boxed{\text{А2}}$ Доказать, что $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ при любых $a, b \geqslant 0$.

Решение. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, отсюда $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. □

$\boxed{\text{Д 2774 г}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. Заметим, что $1 + n^5x^2 = 1 + n^5|x|^2 \geqslant 2|x|n^{5/2}$. Отсюда

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx}{1 + n^5x^2}\right| = \frac{n|x|}{1 + n^5|x|^2} \overset{x \neq 0}{\leqslant} \frac{n|x|}{2n^{5/2}|x|} = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Итоговое неравенство $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}}$ верно и при $x = 0$. Показатель $3/2$ больше 1, поэтому числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ сходится. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. □

$\boxed{\text{А3}}$ Доказать, что $|\operatorname{arctg} t| \leqslant |t|$ при любых t из $\mathbb{R}$.

Решение. Из-за нечётности функций $\operatorname{arctg} t$ и t достаточно доказать неравенство при $t \geqslant 0$. При таких t величины $\operatorname{arctg} t$ и t неотрицательны.

Рассмотрим функцию $f(t) = \operatorname{arctg} t - t$ и найдём её производную:

$$f'(t) = \frac{1}{1 + t^2} - 1 < 0 \quad \forall t > 0.$$

Функция f убывает на $[0, +\infty)$, поэтому для любого $t > 0$ получаем, что $f(t) < f(0) = 0$, т. е. $\operatorname{arctg} t < t$. □

$\boxed{\text{А4}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{nx}{x^2 + n^6}.$

Решение. Воспользуемся ранее доказанными неравенствами:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{n|x|}{x^2 + n^3} \overset{x \neq 0}{\leqslant} \frac{n|x|}{2|x|n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Окончательное неравенство $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ верно и при $x = 0$. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Поэтому функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. □

$\boxed{\text{Д 2774 д}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \quad \tfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2.$

Решение. Оценим сверху выражение $|x^n + x^{-n}|$. Это выражение чётное, поэтому достаточно рассматривать при $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Первый способ (грубый) — оценить отдельно каждое слагаемое:

$$\sup_{1/2 \leqslant |x| \leqslant 2} |x^n + x^{-n}| \leqslant \sup_{1/2 \leqslant x \leqslant 2} x^n + \sup_{1/2 \leqslant x \leqslant 2} x^{-n} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Точный способ — исследовать на монотонность при помощи производной и вычислить супремум:

$$(x^n + x^{-n})' = nx^{n-1} - nx^{-n-1} = nx^{-n-1}(x^{2n} - 1).$$

Максимум достигается в точках 2 и $1/2$, равен $2^n + 2^{-n}$. При $n \to \infty$ эта величина эквивалентна 2^n, что в 2 раза меньше, чем при грубой оценке. Коэффициент 2 не меняет сходимости ряда, поэтому оставим грубую оценку 2^{n+1}. Получили неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant a_n, \qquad \text{где} \qquad a_n = \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Из-за присутствия геометрической прогрессии и факториала его удобно исследовать с помощью признака Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2}{n^2 \cdot \sqrt{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \to 0 < 1.$$

По признаку Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. По признаку Вейерштрасса, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно. □

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}, \quad x > 0.$

Решение. Пусть $f_n(x) = x^3 e^{-nx}$. Нужно оценить эту величину сверху. Самая точная оценка — это супремум! Для исследования функции на экстремумы находим производную:

$$f_n'(x) = 3x^2 e^{-nx} - nx^3 e^{-nx} = nx^2 \left(\frac{3}{n} - x\right) e^{-nx}.$$

Отсюда видно, что максимум достигается в точке $3/n$,

$$\|f_n\| = f_n(3/n) = \frac{27}{e^3} \cdot \frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{27}{e^3} \cdot \frac{1}{n^3}$ сходится. По признаку Вейерштрасса, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно. $\square$

Признак Лейбница равномерной сходимости знакочередующихся функциональных рядов. Пусть при каждом x из X числовая последовательность $f_n(x)$ убывает и стремится к 0, и пусть $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$. Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$ сходится равномерно.

Доказательство. По признаку Лейбница для числовых рядов, при каждом x из X ряд сходится, причём $|R_n(x)| \leqslant f_n(x)$. Поэтому $\|R_n\| \leqslant \|f_n\|$, $\|R_n\| \to 0$, и ряд сходится равномерно. $\square$

$\boxed{\text{A6}}$ Исследовать ряд на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Пусть $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{n}}$. При каждом фиксированном x из $\mathbb{R}$ числовая последовательность $f_n(x)$ убывает и стремится к 0. Кроме того, $\|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. По признаку Лейбница для функциональных рядов, ряд сходится равномерно.

Отметим, что в данном примере нельзя применить признак Вейерштрасса: $\|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится. $\square$