19-е занятие. Признаки Абеля и Дирихле. Радиус сходимости степенного ряда Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Необх. усл. равномерной сходимости функц. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$: $\|f_n\| \to 0$.

$\boxed{\text{A1}}$ Исследовать функ. ряд на сх-ть: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx$, $\quad x > 0$.

<table>
<tr>
<td>

Признак Абеля. Пусть

1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows}$;

2) $\exists C > 0$: $\forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$ $|g_n(x)| \leqslant C$;

3) $\forall x \in X \quad \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотон.

</td>
<td>

Признак Дирихле. Пусть

1) $\exists C > 0$: $\forall x \in X\ \forall k \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right| \leqslant C$;

2) $g_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows} 0$;

3) $\forall x \in X \quad \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотон.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows}$.

</td>
</tr>
</table>

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}$, $\quad x \in [\pi/3, 5\pi/3]$. $\qquad$ $\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n nx}{(n+1)\sqrt{n+x}}$, $\quad x \in [0, 5]$.

Формула Коши-Адамара. Для степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ радиус сходимости R вычисляется по формуле: $\boxed{\dfrac{1}{R} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Определить область сходимости:

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. $\qquad$ $\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}$.

Найти радиусы сходимости:

$\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2} x^n$. $\qquad$ $\boxed{\text{A7}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+3\cos\frac{n\pi}{3}\right)^n}{n+\ln n} (x-1)^n$.

$\boxed{2827}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$, где $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. $\quad$ (Указание: $\ln n < H_n < 1 + \ln n$.)

Найти радиусы сходимости степенных рядов, используя признак Даламбера:

$\boxed{2814}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. $\qquad$ $\boxed{2819}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$.

Домашнее задание № 19
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Вывести формулы для $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\alpha$ и $\sin\frac{\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha$.

Исследовать функциональные ряды на равномерную сходимость:

$\boxed{\text{2775 а}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $x\in[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$.

$\boxed{\text{2775 б}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $x\in[0, 2\pi]$. (Это непростая задача.)

$\boxed{2780}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $x\in\mathbb{R}$. $\boxed{2781}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\cdot\sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $x\geqslant 0$.

Найти радиус и интервал сходимости следующих степенных рядов:

$\boxed{2813}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$. $\boxed{2816}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

$\boxed{2817}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n$ $(a>1)$. $\boxed{2818}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\cdot\frac{1}{2^n}\cdot(x-1)^n$.

$\boxed{\text{A2}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. $\boxed{2824}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

$\boxed{2825}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$. $\boxed{2826}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

$\boxed{2812}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$. (Рассмотреть случаи $p>1$, $0<p\leqslant 1$, $p\leqslant 0$.)

$\boxed{2822}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,\ b>0)$. $\boxed{2815}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}\cdot x^n$ $(0<\alpha<1)$.

$\boxed{2828}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\cdot x^n$. $\boxed{2829}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\cdot x^n$.

Конспект 19-го занятия.
Признаки Абеля и Дирихле для функциональных рядов.
Радиус сходимости степенного ряда
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Необходимое условие равномерной сходимости ряда

Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows$, то $\|f_n\| \to 0$.

Доказательство. По критерию Коши, $\|S_n - S_m\| \to 0$ при $m, n \to \infty$. При $m = n - 1$ получим разность $S_n - S_{n-1}$, равную f_n. $\square$

$\boxed{\text{A1}}$ Исследовать функциональный ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx, \qquad x > 0.$$

Решение. При каждом фиксированном $x > 0$ ряд абсолютно сходится по признаку сравнения:

$$|e^{-nx} \sin nx| \leqslant e^{-nx}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Но $\|f_n\| \geqslant f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = e^{-\pi/2}$, поэтому $\|f_n\| \not\to 0$ и равномерной сходимости нет.

Признаки Абеля и Дирихле для функциональных рядов

<table>
<tr>
<td>

Признак Абеля. Пусть

1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{x \in X}{\rightrightarrows}$;
2) $\exists C > 0\colon\ \forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$ $|g_n(x)| \leqslant C$;
3) $\forall x \in X \quad \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотон.

</td>
<td>

Признак Дирихле. Пусть

1) $\exists C > 0\colon\ \forall x \in X\ \forall k \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right| \leqslant C$;
2) $g_n(x) \overset{x \in X}{\rightrightarrows} 0$;
3) $\forall x \in X \quad \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотон.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Тогда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x) \overset{x \in X}{\rightrightarrows}$.

</td>
</tr>
</table>

$\boxed{\text{A2}}$ Исследовать ряд на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}, \quad x \in [\pi/3, 5\pi/3].$$

Решение. Сначала выведем формулу для $\sum_{n=1}^{k} \cos nx$. Заметим, что

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(n+1/2\right)x\right) - \sin\left(\left(n-1/2\right)x\right)\right),$$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\sum_{n=1}^{k}\cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(k+1/2\right)x\right) - \sin\frac{x}{2}\right) = \sin\frac{kx}{2}\cos\frac{(k+1)x}{2},$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{k}\cos nx = \frac{\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (x \notin 2\pi\mathbb{Z}).}$$

Вернёмся к нашему примеру. Пусть $f_n(x) = \cos nx$, $g_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$.

1. $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2, \qquad k \in \mathbb{N},\ x \in [\pi/3, 5\pi/3].$

2. $\displaystyle\|g_n\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, поэтому $g_n(x) \rightrightarrows 0$.

3. При каждом x числовая последовательность $g_n(x)$ убывает.

По признаку Дирихле, ряд равномерно сходится.

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot nx}{(n+1)\sqrt{n+x}}, \quad x \in [0,5].$

Решение. Заметим, что при каждом x из $[0,5]$ числовая последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ монотонно стремится к 0, а $\displaystyle\sum_{x\in[0,5]} \frac{1}{\sqrt{n+x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Следовательно, по признаку Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$, сходится равномерно.

Теперь рассмотрим функциональную последовательность $g_n(x) = \dfrac{nx}{n+1}$. Её значения ограничены в совокупности:

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{5n}{n+1} < 5 \quad \forall x \in [0,5] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и при каждом x из $[0,5]$ числовая последовательность $\frac{nx}{n+1}$ неубывает, так как $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{-}\frac{1}{n+1}$. По признаку Абеля, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x) \overset{x\in[0,5]}{\rightrightarrows}$.

Формула Коши-Адамара. Для степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ радиус сходимости R вычисляется по формуле: $\boxed{\dfrac{1}{R} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Определить область сходимости:

$\boxed{\text{A4}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Решение. Здесь

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1.$$

Отсюда, по формуле Коши-Адамара, $R = 1$. Это значит, что при $|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ ряд расходится.

Исследуем сходимость на концах интервала сходимости. При $x = 1$ получаем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, при $x = -1$ получаем условно сходящийся ряд Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

$\boxed{\text{A5}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n}{n^2}$.

Решение. Сделаем замену $x + 5 = t$ и рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$.

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 1.$$

По формуле Коши-Адамара, $R = 1$. При $|t| < 1$ ряд абсолютно сходится, при $|t| > 1$ ряд расходится. При $t = 1$ получаем сходящийся положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, при $t = -1$ получаем абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Итак, ряд сходится абсолютно при $|t| \leqslant 1$, т. е. при $x \in [-6, -4]$.

$\boxed{\text{A6}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2+(-1)^n)^n}{n^2} x^n$.

Решение. В этом примере важно, что в формуле Коши-Адамара берётся верхний предел:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2}} = 3.$$

Отсюда $R = 1/3$. При $x = 1/3$ и $x = -1/3$ получаем ряды из следующих слагаемых:

$$a_n = \left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = \left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Из оценок $|a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$, $|b_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$ следует, что эти ряды абсолютно сходятся.

$\boxed{\text{A7}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+3\cos\frac{n\pi}{3}\right)^n}{n+\ln n}(x-1)^n.$

Решение. Вычислим радиус сходимости:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|1+3\cos\frac{n\pi}{3}|}{\sqrt[n]{n+\ln n}} = \varlimsup_{n\to\infty} |1+3\cos\frac{n\pi}{3}| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{\ln n}{n}}} = 4.$$

Отсюда $R = \frac{1}{4}$.

$\boxed{2827}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$, где $H_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$. (Указание: $\ln n < H_n < 1+\ln n$.)

Решение. Из неравенства $\ln n < H_n < 1+\ln n$ получаем, что при достаточно больших n

$$1 \leqslant \sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{1+\ln n} < \sqrt[n]{n}.$$

По теореме о последовательности, зажатой между двумя последовательностями с общим пределом, $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ и $R = 1$.

Найти радиусы сходимости степенных рядов, используя признак Даламбера:

$\boxed{2814}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

Решение. Применим к ряду с общим членом $a_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ признак Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{(n+1)^2|x|}{2n(2n-1)} \to \frac{|x|}{4}.$$

Значит, при $|x| < 4$ ряд сходится абсолютно, при $|x| > 4$ ряд расходится. $R = 4$.

$\boxed{2819}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n.$

Решение. Применим к ряду с общим членом

$$a_n(x) = (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$$

признак Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \left(\frac{2 \cdot (n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\right)^p |x| = \left(\frac{(n+1)}{2n+3}\right)^p |x| \to \frac{|x|}{2^p}.$$

При $|x| < 2^p$ ряд сходится абсолютно, при $|x| > 2^p$ ряд расходится. $R = 2^p$.