20-е занятие. Степенные ряды. Ряды Тейлора
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Найти радиус сходимости степенного ряда, используя признак Даламбера:

$\boxed{2819}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n.$

Ряд Тейлора $\boxed{f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}$

Вспомнить разложения в ряд Тейлора следующих функций:

$$e^x,\qquad \cos x,\qquad \sin x,\qquad (1+x)^p,\qquad \ln(1+x).$$

Разложить следующие функции по целым неотрицательным степеням переменной x и найти соответствующие интервалы сходимости:

$\boxed{2841}$ $f(x)=\operatorname{sh}x.$ $\boxed{2843}$ $f(x)=\sin^2 x.$

$\boxed{\text{A1}}$ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}.$ $\boxed{2855}$ $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}.$

$\boxed{2839\text{ а}}$ $f(x)=\dfrac{1}{a-x}.$ $\boxed{2854}$ $f(x)=\dfrac{x^{10}}{1-x}.$

$\boxed{\text{A2}}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}.$

$\boxed{\text{A3}}$ Найти сумму и радиус сходимости степенного ряда: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{5n}.$

Теорема. Внутри интервала сходимости степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Разложив предварительно производные, путём почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

$\boxed{2869}$ $f(x)=\operatorname{arctg}x.$

$\boxed{2870}$ $f(x)=\arcsin x.$

Домашнее задание № 20
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Разложить следующие функции по целым неотрицательным степеням переменной x и найти соответствующие интервалы сходимости:

$\boxed{2842}$ $f(x) = \operatorname{ch} x$.

$\boxed{2849 \text{ а}}$ $f(x) = \sin(a + x)$.

$\boxed{2852}$ $f(x) = \cos^2 x$.

$\boxed{2853}$ $f(x) = \sin^3 x$. (Подсказка: выразить через $\sin x$ и $\sin 3x$.)

$\boxed{2856}$ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

$\boxed{2857}$ $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. (Подсказка: использовать свойство логарифма.)

$\boxed{\text{A1}}$ $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

$\boxed{2859}$ $f(x) = \dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

$\boxed{2858}$ $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2}$. (Подсказка: разложить на простейшие дроби.)

Найти разложения следующих функций в ряды Тейлора через разложение производных и почленное интегрирование:

$\boxed{2871}$ $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$\boxed{2872}$ $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$. (Эта задача сложнее других.)

$\boxed{\text{A2}}$ Найти сумму и радиус сходимости степенного ряда: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$.

Конспект 20-го занятия.
Степенные ряды
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Найти радиус сходимости степенного ряда, используя признак Даламбера:

$\boxed{2819}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n.$

Решение. Применим к ряду с общим членом

$$a_n(x)=(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$$

признак Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|}=\left(\frac{2\cdot(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\right)^p|x|=\left(\frac{(n+1)}{2n+3}\right)^p|x|\to\frac{|x|}{2^p}.$$

При $|x|<2^p$ ряд сходится абсолютно, при $|x|>2^p$ ряд расходится. $R=2^p$. $\square$

Ряд Тейлора $\boxed{f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}$

Вспомнить разложения в ряд Тейлора следующих функций:

$$e^x,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad \ln(1+x),\quad (1+x)^p.$$

Решение. Эти формулы нужно помнить и уметь быстро выводить:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{+}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Отдельно напишем разложение $(1+x)^p$:

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}x^3 + \ldots =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)}{n!}x^n.$$

Для exp, cos и sin радиус сходимости равен $+\infty$, для $(1+x)^p$ и $\ln(1+x)$ радиус сходимости равен 1. $\square$

Разложить следующие функции по целым неотрицательным степеням переменной x и найти соответствующие интервалы сходимости:

$\boxed{2841}$ $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Решение. 1-й способ. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Разложение e^{-x} отличается от разложения e^x знаками при нечётных степенях x. Если вычесть e^{-x} из e^x, то слагаемые с чётными степенями уйдут, а коэффициенты при нечётных степенях удвоятся. Поэтому разложение $\operatorname{sh} x$ состоит из нечётных степеней разложения экспоненты:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Другой способ — найти производные и применить формулу Тейлора:

$$\begin{array}{cccc} \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x, & \operatorname{sh}'' x = \operatorname{sh} x, & \operatorname{sh}''' x = \operatorname{ch} x, & \ldots \\ \operatorname{sh}'(0) = 1, & \operatorname{sh}''(0) = 0, & \operatorname{sh}'''(0) = 1, & \ldots \end{array}$$

Теперь найдём радиус сходимости. Первый способ: из формулы $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Разложения функций e^x и e^{-x} в степенные ряды по степеням x сходятся при любых x, поэтому так так же будет и для функции $\operatorname{sh} x$.

Второй способ: из коэффициентов разложения. Формулу Коши-Адамара неудобно применять для факториалов (пришлось бы использовать формулу Стирлинга), поэтому поступим по-другому. Вынесем за скобку x и сделаем замену $t = x^2$. Получится следующий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(2n+1)!}.$$

Для него удобно применить формулу Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \frac{t}{(2n+2)(2n+3)} \to 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Значит, ряд сходится при любом $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, ряд для $\operatorname{sh} x$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$. $\square$

$\boxed{2843}$ $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Вспомним формулу понижения степени и разложение в ряд Тейлора для cos:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{x^2}{2\cdot 2} - \frac{x^4}{2\cdot 24} + \frac{x^6}{2\cdot 720} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2\cdot(2n)!}.$$

$\square$

$\boxed{\text{A1}}$ $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Решение. Первый способ — через производные:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \quad \ldots$$

Отсюда $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $f^{(n)}(0) = n!$ и $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Второй способ — вспомнить, что $\dfrac{1}{1-x}$ есть сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с начальным членом 1 и знаменателем x. $\square$

Разложение функции $\dfrac{1}{1-x}$ в ряд по степеням x используется очень часто. Эту формулу нужно помнить:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.}$$

$\boxed{2855}$ $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Решение. Первый способ — через производные:

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \quad f'''(x) = \frac{24}{(1-x)^5}.$$

Отсюда видно, что $f^{(n)}(x) = \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$, $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ и

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.}$$

Второй способ — рассмотреть произведение рядов:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots).$$

Коэффициент при x^0 равен 1, коэффициент при x^1 равен 2 (так как произведение x^1 получается двумя способами), коэффициент при x^2 равен 3, и т. д. Законность умножения степенных рядов доказывают в теории. □

$\boxed{2839\text{ а}}$ $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$ $(a \neq 0)$.

Решение. В знаменателе вынесем за скобку a и применим формулу разложения $\frac{1}{1-t}$:

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

□

$\boxed{2854}$ $f(x) = \dfrac{x^{10}}{1-x}$.

Решение. Умножим разложение $\frac{1}{1-x}$ на x^{10}:

$$\frac{x^{10}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+10} = \sum_{n=10}^{\infty}x^n = x^{10}+x^{11}+x^{12}+\ldots$$

□

$\boxed{\text{A2}}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-6}$.

Решение. Разложим рациональную функцию на элементарные дроби:

$$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Умножая на $x-3$ и подставляя $x=3$, найдём $A = \frac{1}{5}$. Умножая на $x+2$ и подставляя $x=-2$, найдём $B = -\frac{1}{5}$. Итак,

$$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{5(x-3)} - \frac{1}{5(x+2)}.$$

Сведём к дроби $\frac{1}{1-t}$:

$$f(x) = -\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = -\frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} + \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(-2)^n}.$$

Ответ можно записать так:

$$f(x) = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{(-2)^{n+1}} \right) x^n.$$

□

$\boxed{\text{А3}}$ Найти сумму и радиус сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^{5n}$.

Решение. Опять-таки, сведём к геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{5n} = \left[t = 2x^5\right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-2x^5}.$$

Область сходимости: $|t| < 1$, т. е. $|x| < 2^{-1/5}$. Итак, $R = 2^{-1/5}$. □

Теорема. Внутри интервала сходимости степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Разложив предварительно производные, путём почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

$\boxed{2869}$ $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Найдём производную: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Мысленно сделаем замену $t = -x^2$ и воспользуемся разложением для $\frac{1}{1-t}$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Подставим ξ вместо x и проинтегрируем от 0 до x. В правой части будем интегрировать ряд почленно (законность этого доказывается на лекциях):

$$\int_0^x f'(\xi)\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \xi^{2n}\, d\xi.$$

По формуле Ньютона-Лейбница, в левой части получаем разности $f(x)-f(0)$. Для $f(x)=\operatorname{arctg} x$ получим $f(0)=0$. В правой части n-й интеграл равен $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}$$

□

$\boxed{2870}$ $f(x)=\arcsin x$.

Решение. Сначала дифференцируем $\arcsin x$:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}.$$

Теперь применяем формулу для $(1+t)^p$:

$$(1+t)^p=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)}{n!}\,t^n.$$

Отдельно вычислим числитель дроби при $p=-1/2$:

$$p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)=\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!}{2^n}.$$

Отсюда

$$(1-x^2)^{-1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{2^n\cdot n!}\cdot x^{2n}.$$

Вспоминаем, что это мы нашли $f'(x)$. Подставим ξ вместо x и проинтегрируем по ξ от 0 до x. В правой части интегрируем степенной ряд почленно:

$$\int_0^x f'(\xi)\,d\xi=\int_0^x 1\cdot d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{2^n\cdot n!}\cdot\int_0^x \xi^{2n}\,d\xi$$

Левая часть равна $f(x)-f(0)$, причём $f(0)=\arcsin 0=0$. В правой части n-й интеграл равен $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)2^n\cdot n!}x^{2n+1}.$$

□