21-е занятие. Ряды Тейлора.
Суммирование степенных рядов
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Найти разложения функции в степенной ряд по степеням x, вычислить радиус сходимости степенного ряда:

$\boxed{\text{А1}}$ $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-x-12}$.

$\boxed{\text{А2}}$ $f(x) = (1-x)^{-1/2}$.

$\boxed{2870}$ $f(x) = \arcsin x$.

$\boxed{2873\text{б}}$ $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

$\boxed{2883}$ $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

Теорема Абеля. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $S(x)$ — сумма ряда при $|x| < R$, и пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Тогда его сумма равна $\lim\limits_{x\to R-0} S(x)$.

$\boxed{\text{А3}}$ С помощью теоремы Абеля найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

$\boxed{2906}$ $S(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots$

$\boxed{2909}$ $S(x) = \dfrac{x}{1\cdot 2} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

$\boxed{2911}$ $S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

$\boxed{2912}$ $S(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

Домашнее задание № 21
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{2872}$ $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$. (Эта задача сложнее других.)

$\boxed{\text{А1}}$ С помощью теоремы Абеля найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$\boxed{2872}$ $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

Применяя различные методы, найти разложения в степенной ряд следующих функций:

$\boxed{2873\text{а}}$ $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$. $\boxed{2873\text{в}}$ $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$.

$\boxed{2873\text{д}}$ $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

$\boxed{2873\text{ж}}$ $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

$\boxed{2882}$ $f(x) = (1+x)e^{-x}$. $\boxed{2885}$ $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

$\boxed{2907}$ $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dots$

$\boxed{2910}$ $1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots$

Указание к 2910: производную ряда умножить на $1 - x$.

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

$\boxed{2913}$ $1\cdot 2x + 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 4x^3 + \dots$

Разложить в степенной ряд функции:

$\boxed{2902}$ $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. $\boxed{2903}$ $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Конспект 21-го занятия.
Ряды Тейлора
Суммирование степенных рядов
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Найти разложения функции в степенной ряд по степеням x, вычислить радиус сходимости степенного ряда:

$\boxed{\text{A1}}$ $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-x-12}$.

Решение. Сначала раскладываем рациональную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{2x-3}{(x-4)(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}.$$

Умножая это равенство на $x-4$ и подставляя $x=4$, найдём A: $A = \frac{5}{7}$; умножая равенство на $x+3$ и подставляя $x=-3$, найдём B: $B = \frac{9}{7}$. Итак,

$$f(x) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{x-4} + \frac{9}{7}\cdot\frac{1}{x+3} = -\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4-x} - \frac{9}{7}\cdot\frac{-3-x}{.}$$

Далее используем известное разложение $\frac{1}{a-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}$.

Ответ: $f(x) = -\dfrac{1}{7}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{4^{n+1}} + \frac{9}{(-3)^{n+1}}\right)x^n.$ □

$\boxed{\text{A2}}$ $f(x) = (1-x)^{-1/2}$.

Решение. Вспоминаем общую формулу разложения степени бинома:

$$(1+t)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)}{n!}t^n.$$

В нашем случае коэффициент при x^n равен

$$\frac{(-1)^n}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}.$$

Ответ: $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n.$ □

$\boxed{2870}$ $f(x) = \arcsin x$.

Решение. Сначала дифференцируем $\arcsin x$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}\, x^{2n}.$$

Радиус сходимости ряда равен 1. Чтобы получить $f(x)$, подставим в полученную формулу ξ вместо x и проинтегрируем по ξ от 0 до x. В правой части интегрируем степенной ряд почленно:

$$\int_0^x f'(\xi)\, d\xi = \int_0^x 1 \cdot d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \int_0^x \xi^{2n}\, d\xi$$

Левая часть равна $f(x) - f(0)$, причём $f(0) = \arcsin 0 = 0$. В правой части n-й интеграл равен $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Ответ: $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!! \cdot (2n+1)} x^{2n+1}$. □

$\boxed{2873б}$ $f(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

Решение. Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}.$$

Радиус сходимости ряда равен 1. Подставим ξ вместо x и проинтегрируем от 0 до x:

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \xi^{4n}\, d\xi.$$

Учитываем, что $f(0) = 0$.

Ответ: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$. □

$\boxed{2883}$ $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

Решение. Сначала найдём разложение $\operatorname{ch} \sqrt{x}$:

$$\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Отсюда

$$f(x) = (1-2x+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = S_1(x)+S_2(x)+S_3(x),$$

где

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = 1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!};$$

$$S_2(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{n+1}}{(2n)!} = \begin{bmatrix} k=n+1 \\ n=k-1 \end{bmatrix} = -2x-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2x^k}{(2k-2)!};$$

$$S_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(2n)!} = \begin{bmatrix} k=n+2 \\ n=k-2 \end{bmatrix} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{(2k-4)!}.$$

Складывая, получаем ответ:

Ответ: $f(x) = 1-\dfrac{3x}{2}+\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(2k)!}+\frac{2}{(2k-2)!}+\frac{1}{(2k-4)!}\right)x^k.$ □

Теорема Абеля. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $S(x)$ — сумма ряда при $|x|<R$, и пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Тогда его сумма равна $\lim\limits_{x\to R-0} S(x)$.

$\boxed{\text{A3}}$ С помощью теоремы Абеля найти сумму ряда

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

Решение. Вспоминаем разложение arctg по степеням x:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Радиус сходимости равен 1: $R=1$. При $x=1$ получим нужный ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница. Значит, по теореме Абеля,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1-0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

□

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

$\boxed{2906}$ $S(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

Решение. Радиус сходимости равен 1. Дифференцируем почленно:

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Интегрируем:

$$S(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$$

Чтобы найти C, подтавляем в обе части $x = 0$. Поскольку в исходном ряде свободный член отсутствует, то $S(0) = 0$. Отсюда $C = 0$.

Ответ: $S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad (|x| < 1).$ □

$\boxed{2909}$ $S(x) = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \ldots$

Решение. Дифференцируем:

$$S'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \ldots$$

Умножаем на x^2, чтобы показатели совпали со знаменателями:

$$x^2 S'(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Теперь снова дифференцируем:

$$(x^2 S'(x))' = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

Отсюда видно, что радиус сходимости равен 1. Интегрируем:

$$x^2 S'(x) = -x - \ln(1-x) + C.$$

Подставляя $x = 0$, находим $C = 0$:

$$x^2 S'(x) = -x - \ln(1-x).$$

Выражаем $S'(x)$:

$$S'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}.$$

Интегрируем. Отдельно найдём интеграл от второго слагаемого:

$$\int \frac{\ln(1-x)\,dx}{x^2} = \left[\begin{array}{cc} u = \ln(1-x) & du = -\frac{1}{1-x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \int \frac{dx}{x(1-x)} =$$
$$= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx =$$
$$= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \ln x + \ln(1-x) + C.$$

Отсюда

$$S(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + C = \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + C.$$

Подставляя $x = 0$, в левой части получим 0, а правой получим $-1+C$. Отсюда $C = 1$.

Ответ: $S(x) = 1 + \dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} \qquad (|x| < 1).$ □

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

$\boxed{2911}$ $S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Решение. С помощью Коши-Адамара легко найти радиус сходимости: $R = 1$. При $|x| < 1$ ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать. Разделим на x:

$$\frac{S(\xi)}{\xi} = 1 + 2\xi + 3\xi^2 + \ldots$$

Затем проинтегрируем от 0 до x:

$$\int\limits_0^x \frac{S(\xi)}{\xi}\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (n+1)\xi^n\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

Итак,

$$\int\limits_0^x \frac{S(\xi)}{\xi}\,d\xi = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

Теперь продифференцируем по x. В левой части получим производную интеграла с переменным верхним пределом, равную $\frac{S(x)}{x}$:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ответ: $S(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1).$ □

$\boxed{2912}$ $S(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$

Решение. Разделим на x:

$$\frac{S(x)}{x} = 1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 + \ldots$$

Найдём отсюда первообразную F функции $\frac{S(x)}{x}$:

$$F(x) = x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \ldots$$

Опять разделим на x:

$$\frac{F(x)}{x} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

Найдём отсюда первообразную G функции $\frac{F(x)}{x}$:

$$G(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

Дифференцируя, найдём $\frac{F(x)}{x}$: $\dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Отсюда

$$F(x) = \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Дифференцируя, найдём $\frac{S(x)}{x}$: $\frac{S(x)}{x} = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3}$.

Ответ: $S(x) = \dfrac{x(1-x)}{(1+x)^3} \qquad (|x| < 1).$ □