22-е занятие. Дифференцирование СИЗП.
Равномерная сходимость НИЗП
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$$\boxed{\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha) + \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.}$$

$\boxed{3718а}$ Найти $F'(\alpha)$: $\quad F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Вычислить интеграл с помощью дифференцирования по параметру:

$\boxed{3734}$ $\quad I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

Область сходимости НИЗП

$\boxed{А1}$ Вспомнить области сходимости: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}.$

Найти области сходимости следующих НИЗП:

$\boxed{А2}$ $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha e^x}$, $\quad\boxed{А3}$ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha e^x}$, $\quad\boxed{А4}$ $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$, $\quad\boxed{А5}$ $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}$.

Равномерная сходимость НИЗП

Используя определение, исследовать следующие НИЗП на равномерную сходимость на указанном множестве:

$\boxed{А6}$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x}$, $\quad$ а) $\alpha \geqslant 2$, $\quad$ б) $\alpha > 1$. $\qquad\boxed{3759}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$, $\quad \alpha > 0$.

$\boxed{3754}$ $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx$, $\quad$ а) $\alpha \in [a,b]$, где $a > 0$, $\quad$ б) $\alpha \in (0,b]$.

Домашнее задание № 22
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Найти $F'(\alpha)$:

$\boxed{3718б}$ $F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx.$ $\boxed{3718в}$ $F(\alpha) = \int\limits_{0}^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\, dx.$

$\boxed{3717}$ Вычислить $F'(x)$, если $F(x) = \int\limits_{x}^{x^2} e^{-xy^2}\, dy.$

Вычислить интегралы, применяя дифференцирование по параметру:

$\boxed{3733}$ $\int\limits_{0}^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx.$ $\boxed{3735}$ $\int\limits_{0}^{\pi/2} \ln \frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}.$

Указание к 3733: после дифференцирования по a сделать замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и применить метод неопределённых коэффициентов.

Найти области сходимости интегралов:

$\boxed{A1}$ $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos x}{x^p}\, dx.$ $\boxed{3743}$ $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\, dx.$ $\boxed{3744}$ $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{|\ln x|^p}.$

Повторить определение равномерной сходимости НИЗП. Используя определение, исследовать следующие НИЗП на равномерную сходимость:

$\boxed{3755.1}$ $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, а) $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\alpha_0 > 1$; б) $\alpha > 1$. $\boxed{3755.2}$ $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.

$\boxed{3756}$ $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx$, $\alpha \in (\alpha_0, +\infty)$. (Использовать A2.)

$\boxed{A2}$ Найти $\int e^{-\alpha x} \sin \beta x\, dx$. Проще всего это сделать методом неопределённых коэффициентов — подобрать такие C_1 и C_2 (зависящие от α и β), что

$$\left(e^{-\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)\right)' = e^{-\alpha x} \sin \beta x.$$

$\boxed{A3}$ Повторить признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для НИЗП.

Конспект 22-го занятия.
Равномерная сходимость
несобственных интегралов, зависящих от параметра
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$$\boxed{\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha) + \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.}$$

Достаточные условия для применения этой формулы: f и f'_α непрерывны, φ и ψ диффенцируемы.

$\boxed{3718а}$ Найти $F'(\alpha)$: $F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Решение. Введём обозначения:

$$f(x,\alpha) = e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}, \quad \varphi(\alpha) = \sin\alpha, \quad \psi(\alpha) = \cos\alpha.$$

Вычислим вспомогательные выражения:

$$f'_\alpha(x,\alpha) = e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}, \qquad \varphi'(\alpha) = \cos\alpha, \qquad \psi'(\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$f(\varphi(\alpha),\alpha) = e^{\alpha|\cos\alpha|}, \qquad f(\psi(\alpha),\alpha) = e^{\alpha|\sin\alpha|}.$$

Подставим в формулу:

$$F'(\alpha) = -e^{\alpha|\sin\alpha|}\cdot\sin\alpha - e^{\alpha|\cos\alpha|}\cdot\cos\alpha + \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

В этом примере интеграл в правой части, скорее всего, не выражается через элементарные функции, поэтому полученное выражение считается ответом.

Есть примеры, в которых интеграл $\int F'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ хорошо считается. □

Вычислить интеграл с помощью дифференцирования по параметру:

$\boxed{3734}$ $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$.

Решение. Рассмотрим только случай $\alpha > 0$. Доопределим подынтегральную функцию в особых точках:

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}, & 0 < x < \frac{\pi}{2},\ \alpha \neq 0; \\ 0, & x = 0 \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Функция f непрерывна на $[0, \pi/2] \times [0, +\infty)$, поэтому I — непрерывная функция.

Далее, функция $f'_\alpha(x,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x}$ непрерывна при $\alpha > \alpha_0$, где α_0 — какое-нибудь положительное число, поэтому при $\alpha > \alpha_0$ можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x}\, dx.$$

Сделаем замену: $t = \operatorname{tg} x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\alpha^2 t^2)(1+t^2)}.$$

Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(1+\alpha^2t^2)(1+t^2)} = \frac{-\alpha^2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{1}{1+\alpha^2t^2} + \frac{1}{1-\alpha^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\alpha^2t^2}\, dt = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \alpha t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha},$$

Получим:

$$I'(\alpha) = -\frac{\pi\alpha}{2(1-\alpha^2)} + \frac{\pi}{2(1-\alpha^2)} = \frac{\pi(-\alpha+1)}{2(1-\alpha^2)} = \frac{\pi}{2(1+\alpha)}.$$

Отсюда $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha) + C$. Формула верна при любом $\alpha > \alpha_0$, где $\alpha_0 > 0$. Значит, она верна при любом $\alpha > 0$.

Но левая и правая части непрерывны на $[0, +\infty)$. Значит, формула верна и при $\alpha = 0$. Учитывая, что $I(0) = 0$, получим $C = 0$.

Ответ: $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$. □

Область сходимости НИЗП

$\boxed{\text{A1}}$ Вспомнить области сходимости: $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\quad \int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^\alpha},\quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}$.

Решение.

$$\text{интеграл } \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \text{ сходится } \iff \alpha>1;$$

$$\text{интеграл } \int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^\alpha} \text{ сходится } \iff \alpha<1;$$

$$\text{интеграл } \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x} \text{ сходится } \iff \alpha>1 \text{ или } \begin{cases}\alpha=1;\\ \beta>1.\end{cases}$$

$\square$

Найти области сходимости следующих НИЗП.

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha e^x}$.

Решение. Неформально говоря, экспонента «переборет» любую степенную функцию, причём после «борьбы» у экспоненты останется ещё достаточно сил, чтобы обеспечить сходимость интеграла.

Формально: при любом фиксированном $\alpha\in\mathbb{R}$ при $x\to+\infty$ имеем

$$\frac{1}{x^\alpha e^x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Действительно,

$$\frac{1}{x^\alpha e^x}:\frac{1}{x^2}=\frac{x^{2-\alpha}}{e^x}\to 0.$$

По признаку сравнения, интеграл сходится.

Ответ: $\alpha\in\mathbb{R}$. $\square$

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^\alpha e^x}$.

Решение. Особая точка — $x = 0$. При $x \to 0$ имеем $e^x \to 1$, поэтому

$$\frac{1}{x^\alpha e^x} \sim \frac{1}{x^\alpha}.$$

Ответ: $\alpha > 1$. $\square$

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$.

Решение. Если $\alpha > 1$, то интеграл сходится абсолютно:

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}.$$

Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то интеграл сходится условно по признаку Дирихле. Можно доказать, что при $\alpha \leqslant 0$ интеграл расходится. $\square$

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}$.

Решение. Особая точка — 0. При достаточно малых положительных x подынтегральная функция положительна, поэтому можно использовать признак сравнения ($x \to 0$):

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

Ответ: $\alpha > 2$. $\square$

Равномерная сходимость НИЗП

Для исследования НИЗП

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \qquad (\alpha \in A)$$

на равномерную сходимость можно действовать по следующей схеме:

1. При любом фиксированном α из A вычислить «остаточный интеграл»:

$$R(L, \alpha) = \int_L^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx.$$

   Если этот интеграл расходится, то исходный интеграл тоже расходится, и на этом исследование заканчивается.

2. При любом фиксированном $L > x_0$ вычислить величину

$$R(L) = \sup_{\alpha \in A} |R(L, \alpha)|.$$

3. Выяснить, стремится ли $R(L)$ к 0 при $L \to +\infty$.

Схема легко переносится на случай конечной особой точки.

Используя определение, исследовать следующие НИЗП на равномерную сходимость на указанном множестве:

$\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$, а) $\alpha \geqslant 2$, б) $\alpha > 1$.

Решение. Рассмотрим остаточный интеграл:

$$R(L, \alpha) = \int_L^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \left[\begin{array}{c} t = \ln x; \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right] = \int_{\ln L}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \left. \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{\ln L}^{+\infty} = \frac{(\ln L)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Далее важен промежуток изменения α.

Если $\alpha \geqslant 2$, то

$$R(L) = \sup_{\alpha \geqslant 2} \frac{(\ln L)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = |R(L, 2) = \frac{1}{\ln L}.$$

В этом случае $R(L) \to 0$ при $L \to +\infty$, т. е. НИЗП сходится равномерно.

Если $\alpha > 1$, то

$$R(L) = \sup_{\alpha > 1} \frac{(\ln L)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \geqslant |R(L, 1 + 0)| = +\infty,$$

и НИЗП не сходится равномерно. □

$\boxed{3759}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}$, $\alpha > 0$.

Решение. Находим остаточный интеграл:

$$R(L, \alpha) = \int_L^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x - \alpha)\Big|_L^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(L - \alpha).$$

Отсюда

$$R(L, \alpha) = \sup_{\alpha>0} |R(L, \alpha)| = R(L, +\infty) = \pi.$$

Ответ: Интеграл не сходится равномерно. $\square$

$\boxed{3754}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$, а) $\alpha \in [a, b]$, где $a > 0$, б) $\alpha \in (0, b]$.

Решение. Считаем остаточный интеграл:

$$R(L, \alpha) = \int_L^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \left(-e^{-\alpha x}\right)\Big|_L^{+\infty} = e^{-\alpha L}.$$

Если $\alpha \in [a, b]$, где $a > 0$, то

$$R(L) = \sup_{\alpha\in[a,b]} e^{-\alpha L} = R(L, a) = e^{-aL},$$

$R(L) \to 0$ при $L \to +\infty$, интеграл сходится абсолютно.

Если $\alpha \in (0, b]$, то

$$R(L) = \sup_{\alpha\in[0,b]} e^{-\alpha L} = R(L, 0) = 1.$$

Равномерной сходимости нет. $\square$