23-е занятие. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости НИЗП
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

$\boxed{3762}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx, \quad \alpha > 0.$

Признак Вейерштрасса

Сформулировать признак Вейерштрасса для равномерной сходимости несобственных интегралов.

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$ $\qquad$ $\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{y\, dx}{1+x^4y^2} \qquad (y \geqslant 0).$

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{\sqrt{1+x^3}}\, dx \qquad (y \in \mathbb{R}).$

Признаки Абеля и Дирихле

Сформулировать признаки Абеля и Дирихле.

$\boxed{3755}$ Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ сходится

1) равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, не содержащем значения $\alpha = 0$;
2) неравномерно на каждом сегменте $[a, b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

Для сведения: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$

$\boxed{3768}$ $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} \qquad (0 < n < 2).$ $\qquad$ $\boxed{3761,\ p = 1}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p}, \quad \alpha \geqslant 0.$

$\boxed{3760}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx, \quad \alpha \geqslant 0.$ $\qquad$ $\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sin(2x+3y)}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}\, dx.$

Домашнее задание № 23
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Повторить формулировку и доказательство признаков Вейерштрасса, Абеля и Дирихле (о равномерной сходимости НИЗП).

Доказать равномерную сходимость НИЗП, используя признак Вейерштрасса:

$\boxed{3757}$ $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx, \quad \alpha \in [a, b].$ $\boxed{3758}$ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

$\boxed{3760.1}$ $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}\,dx, \quad p \in [0, 10].$

$\boxed{3763}$ Исследовать на равномерную сходимость: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx;$

а) $\alpha \in [a, b]$; б) $\alpha \in \mathbb{R}$.

Указание к 3763б: использовать тот факт, что $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

$\boxed{3767}$ $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$

Исследовать на равномерную сходимость, используя признаки Абеля и Дирихле:

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx \qquad (y \in \mathbb{R}).$ $\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos 3x}{\ln x + y^2}\,dx \qquad (y \in \mathbb{R}).$

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,\sin 2x^2}{\sqrt{x+y}}\,dx \qquad (y \geqslant 0).$ $\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin(x\cdot 3^y)\,\operatorname{tg}\frac{1}{x}\,dx \qquad (y \in \mathbb{R}).$

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x+1}\,dx \qquad (y \geqslant 3).$