

## 24-е занятие. Эйлеровы интегралы (функции $\Gamma$ и $B$ )

### Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Определения гамма-функции и бета-функции:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

**Д 3841** Доказать, что функция  $\Gamma(x)$  непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области  $x > 0$ .

**А1** Доказать формулу понижения:  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

**А2** Вычислить  $\Gamma(1)$ ,  $\Gamma(2)$ ,  $\Gamma(3)$ ,  $\Gamma(4)$ ,  $\Gamma(n)$ .

Связь между  $B$ - и  $\Gamma$ -функцией, формула дополнения для  $\Gamma$ -функции (без доказательства):

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

**А3** Вычислить  $\Gamma(1/2)$ ,  $\Gamma(3/2)$ ,  $\Gamma(5/2)$ ,  $\Gamma(7/2)$ ,  $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ .

**А4** Другое представление  $B$ -функции (доказать дома):

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du.$$

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

**Д 3844**  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$

**Д 3845**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$

**Д 3856**  $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx.$

**Д 3862**  $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0).$

**Д 3863**  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx.$

## Домашнее задание № 24

### Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

**Д 3842** Доказать, что бета-функция  $B(x, y)$  непрерывна и обладает производными всех порядков в области  $x > 0, y > 0$ .

**А1** Вычислить значение  $\Gamma(1/2)$ , не пользуясь формулой дополнения. Подсказка: с помощью подходящей замены свести к интегралу Пуассона.

**А2** С помощью подходящей замены переменной доказать формулу:

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du.$$

**Д 3843**  $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx.$

**Д 3846**  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

**Д 3847**  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$

**Д 3848**  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx.$

**Д 3849**  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 1).$

**Д 3850**  $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in \mathbb{Z}, n > 0).$

**Д 3857**  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x dx.$

**Д 3861**  $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$

**Д 3864**  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx.$

**Д 3864.1**  $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx.$

## Конспект 24-го занятия.

### Эйлеровы интегралы ( $\Gamma$ - и $V$ -функции)

#### Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

**Д 3841** Доказать, что функция  $\Gamma(x)$  непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области  $x > 0$ .

**Решение.** Заметим, что  $n$ -я производная по параметру от подынтегральной функции равна

$$f_n(t, x) = t^{x-1} \ln^n t \cdot e^{-t}.$$

Достаточно доказать, что интеграл  $\int_0^{+\infty} f_n(t, x) dt$  равномерно сходится на любом интервале вида  $(a, b)$ , где  $0 < a < b < +\infty$ , так как объединение таких интервалов равно  $(0, +\infty)$ . Имеется две особые точки:  $0$  и  $+\infty$ . Точкой  $1$  разобьём несобственный интеграл на два несобственных интеграла, и для каждого из них применим признак Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} |t^{x-1} \ln^n t \cdot e^{-t}| &\stackrel{t \leq 1}{\leq} \left(\frac{1}{t}\right)^{1-x} \ln^n \frac{1}{t} \stackrel{t \leq t_0}{\leq} \frac{1}{t^{1-a}} \cdot \frac{1}{t^{a/2}} \leq \frac{1}{t^{1-a/2}}. \\ |t^{x-1} \ln^n t \cdot e^{-t}| &\stackrel{t \geq t_0 > 1}{\leq} t^b \cdot t^n \cdot \frac{1}{t^{n+b+2}} \leq \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

В оценках использована шкала роста: на бесконечности логарифм растёт медленнее, чем степенная функция с положительным показателем, а степенная функция растёт медленнее, чем экспонента.  $\square$

**А1** Доказать формулу понижения:  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

**Решение.** Интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[ \begin{array}{l} u = t^x, \quad dv = e^{-t} dt \\ du = xt^{x-1} dx, \quad v = -e^{-t} \end{array} \right] = \\ &= -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

При вычислении предела  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t}$  использован тот факт, что на бесконечности экспонента растёт быстрее, чем степенная функция.  $\square$

**А2** Вычислить  $\Gamma(1)$ ,  $\Gamma(2)$ ,  $\Gamma(3)$ ,  $\Gamma(4)$ ,  $\Gamma(n)$ .

**Решение.** Вычисляем  $\Gamma(1)$  с помощью определения:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = e^{-t} \Big|_{+\infty}^0 = 1.$$

Далее используем формулу понижения:

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \Gamma(1 + 1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma(3) &= \Gamma(2 + 1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2, \\ \Gamma(4) &= \Gamma(3 + 1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6.\end{aligned}$$

С помощью математической индукции нетрудно доказать, что

$$\boxed{\Gamma(n) = (n - 1)!}.$$

□

**А3** Вычислить  $\Gamma(1/2)$ ,  $\Gamma(3/2)$ ,  $\Gamma(5/2)$ ,  $\Gamma(7/2)$ ,  $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ .

**Решение.**  $\Gamma(1/2)$  проще всего вычислить с помощью формулы дополнения (при  $x = 1/2$ ):

$$\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(1/2) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi,$$

откуда  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Далее используем формулу понижения:

$$\begin{aligned}\Gamma(3/2) &= \frac{1}{2} \cdot \Gamma(1/2) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}; \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3}{2} \cdot \Gamma(3/2) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \sqrt{\pi}; \\ \Gamma(7/2) &= \frac{5}{2} \cdot \Gamma(5/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \cdot \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

С помощью математической индукции легко доказать, что

$$\boxed{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n - 1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}, n > 0)}.$$

□

**А4** Другое представление В-функции (доказать дома):

$$\boxed{B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1 + u)^{x+y}} du.}$$

Подсказка: в интеграле, определяющем В-функцию, сделать замену  $t = \frac{u}{1+u}$ .

## Вычисление некоторых определённых интегралов с помощью $\Gamma$ - и $B$ -функции

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

$$\boxed{\text{Д 3844}} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$$

**Решение.** С помощью подходящей замены сведём к  $B$ -функции:

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left[ \begin{array}{l} x = a\sqrt{t} \\ dx = \frac{a dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right] = \frac{a^4}{2} \int_0^1 t^{1/2} (1-t)^{1/2} dt = \\ &= \frac{a^4}{2} B(3/2, 3/2) = a^4 \cdot \frac{\Gamma(3/2)^2}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

□

$$\boxed{\text{Д 3845}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

**Решение.** Сравнивая с другим представлением  $B$ -функции, видим, что наш интеграл равен

$$B(5/4, 3/4) = \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \cdot \Gamma(1/4)\Gamma(3/4).$$

Применим формулу дополнения:

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{4}.$$

□

$$\boxed{\text{Д 3856}} \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx.$$

**Решение.** Сначала естественно сделать замену  $z = \sin x$ . При этом один косинус отделим для дифференциала:

$$I = \int_0^1 z^m (\sqrt{1-z^2})^{n-1} dz.$$

Теперь сделаем замену  $t = z^2$ , отделяя один  $z$  для дифференциала:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Из определения В-функции появляются условия  $m > -1$ ,  $n > -1$ . □

Д 3862  $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0).$

**Решение.** Заметим, что выражение  $x^p \ln x$  есть производная от  $x^p$  по переменной  $p$ . Формулу дифференцирования под знаком несобственного интеграла можно применить, так как интегралы сходятся равномерно, когда  $p$  пробегает любой сегмент вида  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha > -1$ . Поэтому исходный интеграл  $I(p)$  равен  $F'(p)$ , где

$$F(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} dx = \left[ \begin{array}{l} t = ax \\ x = t/a \\ dx = \frac{dt}{a} \end{array} \right] = \frac{1}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = \frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}.$$

Ответ:  $F'(p)$ , где  $F(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}$ . □

Д 3863  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx.$

**Решение.** Обозначим этот интеграл через  $I(p)$ . Легко видеть, что  $I(p) = F'(p)$ , где

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Из определения В-функции получается условие  $0 < p < 1$ . Далее,

$$I(p) = F'(p) = -\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}.$$

□