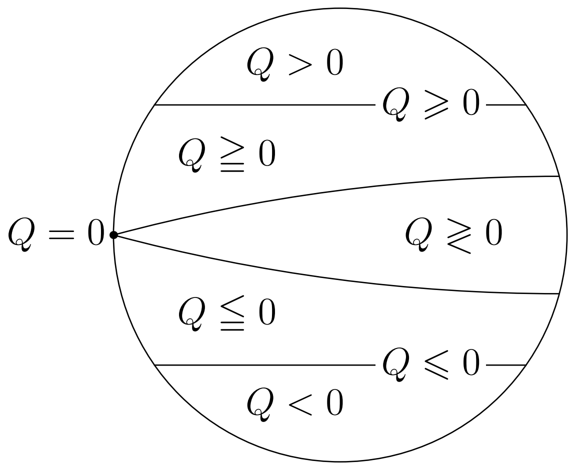
О знакоопределённости квадратичных форм

Определение. Для квадратичных форм на вещественном пространстве L будем использовать следующую классификацию:

a) $Q > 0$, если $Q(x) > 0$ для любого $x \in L \setminus \{0\}$;
b) $Q < 0$, если $Q(x) < 0$ для любого $x \in L \setminus \{0\}$;
c) $Q \geqslant 0$, если $Q(x) \geqslant 0$ для любого $x \in L \setminus \{0\}$;
d) $Q \leqslant 0$, если $Q(x) \leqslant 0$ для любого $x \in L \setminus \{0\}$;
e) $Q \geqq 0$, если $Q(x) \geqslant 0$ для любого $x \in L \setminus \{0\}$, причём существует такой вектор $x \in L \setminus \{0\}$, что $Q(x) = 0$.
f) $Q \leqq 0$, если $Q(x) \geqslant 0$ для любого $x \in L \setminus \{0\}$, причём существует такой вектор $x \in L \setminus \{0\}$, что $Q(x) = 0$.
g) $Q \gtrless 0$, если существуют такие векторы $x, y \in L \setminus \{0\}$, что $Q(x) > 0$ и $Q(y) < 0$.



Типы знакоопределённости

На рисунке показана схема зависимостей между различными типами знакоопределённости. Класс нестрого положительных квадратичных форм разбивается на классы строго положительных и квазиположительных, а класс нестрого отрицательных квадратичных форм — на классы строго отрицательных и квазиотрицательных. Нулевая квадратичная форма $Q = 0$ одновременно удовлетворяет условиям $Q \geqslant 0$, $Q \leqslant 0$, $Q \geqq 0$ и $Q \leqq 0$, но не удовлетворяет условию $Q \gtrless 0$.

Следующая теорема даёт критерий принадлежности квадратичной формы тому или иному классу знакоопределённости в терминах индексов инерции (rank_+ и rank_-).

Теорема. *Пусть Q — квадратичная форма на L. Тогда:*

(1) $Q > 0 \iff \mathrm{rank}_+(Q) = \dim L$;
(2) $Q < 0 \iff \mathrm{rank}_-(Q) = \dim L$;
(3) $Q \geqslant 0 \iff \mathrm{rank}_-(Q) = 0$;
(4) $Q \leqslant 0 \iff \mathrm{rank}_+(Q) = 0$;
(5) $Q \geqq 0 \iff \mathrm{rank}_-(Q) = 0$ *и* $\mathrm{rank}_+(Q) < \dim L$;
(6) $Q \leqq 0 \iff \mathrm{rank}_+(Q) = 0$ *и* $\mathrm{rank}_-(Q) < \dim L$;
(7) $Q \gtrless 0 \iff \mathrm{rank}_+(Q) > 0$ *и* $\mathrm{rank}_-(Q) > 0$.