

Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр 4-е занятие. Вычисление площадей

Формула для площади плоской фигуры D :

$$S = \iint_D dx dy = \int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Найти площадь, ограниченную следующими кривыми:

3986 $(x - y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a > 0).$

A1 Вывести формулу для площади в полярных координатах:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)) d\varphi.$$

Переходя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры, ограниченной следующей кривой:

3987 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); \quad x^2 + y^2 \geq a^2.$

Производя надлежащую замену переменных, найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

3993 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, \quad y > 0).$

3998.1 $x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = cy^2, \quad x^3 = dy^2 \quad (0 < a < b; \quad 0 < c < d).$

Вычисление объёмов цилиндров

Тело вида $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, где D — плоская фигура, называют *цилиндром* с основанием D . Формула для объёма цилиндра:

$$V = \iint_D (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy.$$

Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4009 $z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$

A2 $z = 4 - x^2, \quad y = 5, \quad y = 0, \quad z = 0.$

A3 $x^2 + y^2 + a^2 z = a^2, \quad z = 0 \quad (\text{перейти к полярной системе координат}).$

Домашнее задание № 4

Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Найти площади, ограниченные следующими кривыми:

$$\boxed{3984} \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (a > 0).$$

$$\boxed{3985} \quad y^2 = 2px + p^2, \quad y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, \quad q > 0).$$

Вводя обобщённые полярные координаты ρ и φ по формулам

$$x = A\rho \cos^\alpha \varphi, \quad y = B\rho \sin^\alpha \varphi \quad (\rho \geq 0),$$

где A, B, α — надлежащим образом подобранные постоянные, найти площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми (параметры считаются положительными):

$$\boxed{3991} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

$$\boxed{3996} \quad x + y = a, \quad x + y = b, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x \quad (0 < a < b; \quad 0 < \alpha < \beta).$$

$$\boxed{3997} \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = x, \quad y = 2x \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$$\boxed{4007} \quad z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$\boxed{4008} \quad x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (a \geq R\sqrt{2}).$$

$$\boxed{4029} \quad z = xy, \quad x^2 = y, \quad x^2 = 2y, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

Переходя к полярным координатам, найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$$\boxed{4013} \quad z^2 = xy, \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (\text{только свести к интегралу, интеграл не вычислять}).$$