Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр
5-е занятие. Вычисление площадей поверхностей

Повторение

Производя надлежащую замену переменных, найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$\boxed{\text{3991 (из домашней работы)}}$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}.$

Вычислить объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$\boxed{4025}$ $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

Вычисление площадей поверхностей

Площадь поверхности $z=z(x,y)$, где $(x,y)\in\Omega$:

$$\boxed{S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy.}$$

$\boxed{4041}$ Найти площадь части поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключённой внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

$\boxed{4037}$ Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

Площадь поверхности $(x,y,z)=F(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, где $(u,v)\in\Omega$:

$$\boxed{S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,}$$

где

$$\begin{aligned}
E&=\langle F'_u,F'_u\rangle=(x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2,\\
G&=\langle F'_u,F'_v\rangle=(x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2,\\
F&=\langle F'_v,F'_v\rangle=x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v.
\end{aligned}$$

$\boxed{4049}$ Найти площадь части поверхности тора

$$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\qquad y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\qquad z=a\sin\psi,$$

где $0<a\leqslant b$, ограниченной двумя меридианами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и двумя параллелями $\psi=\psi_1$, $\psi=\psi_2$.

Домашнее задание № 5
Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Повторение

Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

$\boxed{3998}$ $y^2 = 2px, \quad y^2 = 2qx, \quad x^2 = 2ry, \quad x^2 = 2sy$
$(0 < p < q; \quad 0 < r < s)$.

Площади поверхностей

$\boxed{\text{T1}}$ Доказать, что площадь параллелограмма с вершинами

$$(0,0,0), \quad (1,0,a), \quad (0,1,b), \quad (1,1,a+b)$$

равна $\sqrt{1+a^2+b^2}$. (Подсказка: векторное произведение.)

$\boxed{\text{T2}}$ Проверить, что формулы для площади поверхностей $z = z(x,y)$ и $(x,y,z) = F(u,v)$ совпадают, если подставить $x = u$, $y = v$, $z = z(x,y)$.

$\boxed{4036}$ Найти площадь поверхности $az = xy$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

$\boxed{4038}$ Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$, заключённой внутри цилиндра $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b \leqslant a)$.

$\boxed{4039}$ Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

$\boxed{4040}$ Найти площадь части поверхности $x^2+y^2+z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$ (задача Вивиани).

$\boxed{4042}$ Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

$\boxed{4045}$ Найти площадь части поверхности $x^2+y^2 = a^2$, вырезанной плоскостями $x + z = 0$, $x - z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

$\boxed{4047}$ Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченной двумя параллелями (ψ_1 и ψ_2, $\psi_1 < \psi_2$) и двумя меридианами (φ_1 и φ_2, $\varphi_1 < \varphi_2$). Использовать сферические координаты:

$$x = R\cos\psi\cos\varphi, \qquad y = R\cos\psi\sin\varphi, \qquad z = R\sin\psi.$$