

Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр 7-е занятие. Вычисление объёмов

Объём области V ($V \subset \mathbb{R}^3$) выражается формулой

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$4101 \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad y = x^2.$$

$$4102 \quad z = x + y, \quad z = xy, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$4105 \quad az = a^2 - x^2 - y^2, \quad z = a - x - y, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объёмы, ограниченные поверхностями:

$$4107 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 \leq z^2.$$

В некоторых примерах удобно пользоваться обобщёнными сферическими координатами

$$\rho, \quad \varphi, \quad \psi \quad \left(\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

вводя их по формулам

$$x = a\rho \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad y = b\rho \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad z = c\rho \sin^\beta \psi.$$

При этом $|J| = \alpha\beta abc\rho^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi$.

При помощи подходящей замены переменных вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$4118 \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0).$$

$$4120 \quad x^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (x > 0).$$

Домашнее задание № 7

Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$\boxed{4103} \quad x^2 + z^2 = a^2, \quad x + y = \pm a, \quad x - y = \pm a.$$

$$\boxed{4104} \quad az = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\boxed{4106} \quad z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объёмы, ограниченные поверхностями:

$$\boxed{4108} \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

$$\boxed{4110} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0, 0 < a < b).$$

При помощи подходящей замены переменных вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$\boxed{4112} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

$$\boxed{4118.2} \quad \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0).$$

$$\boxed{4119} \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 2(x^2 + y^2), \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad x = 2y, \quad 2x = y \quad (x > 0, \quad y > 0).$$