

Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр
10-е занятие. Несобственные интегралы.

Числовые ряды

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\boxed{\text{A1}} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx. \quad \boxed{2380.2} \int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx.$$

$$\boxed{2393} \text{ Найти в. р. } \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x}, \text{ т. е. } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} \right).$$

Числовые ряды

Доказать непосредственно (через предел частичных сумм) сходимость следующих рядов и найти их суммы:

$$\boxed{2546} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

$$\boxed{2549} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$\boxed{2551a} \quad q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha + \dots \quad (|q| < 1).$$

Исследовать сходимость рядов:

$$\boxed{2556} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n. \quad \boxed{2553} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx.$$

$\boxed{2554}$ Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка следования, также сходится и имеет ту же сумму. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

Интегральный признак сходимости. Примеры:

$$\boxed{\text{A2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \boxed{\text{A3}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad \boxed{2564} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Домашнее задание № 10

Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\boxed{2378} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad \boxed{2379} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 100} dx.$$

$$\boxed{2395} \text{ Найти в. р. } \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx, \text{ т. е. } \lim_{E \rightarrow +\infty} \int_{-E}^E \operatorname{arctg} x dx.$$

Числовые ряды

Доказать непосредственно (через предел частичных сумм) сходимость следующих рядов и найти их суммы:

$$\boxed{2547} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

$$\boxed{2550} \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

$$\boxed{2551} \text{ а) } \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin k\alpha, \quad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos k\alpha \quad (|q| < 1).$$

$\boxed{2555}$ Доказать, что если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд также сходится.

Исследовать сходимость рядов:

$$\boxed{2559} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}. \quad \boxed{2562} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}. \quad \boxed{2563} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

$\boxed{2568}$ Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$, сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится.