

Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр  
 12-е занятие. Абсолютная и условная сходимость

**Признак Лейбница:** если  $a_n \searrow 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  сходится.

$$\boxed{\text{A1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \quad \boxed{\text{A2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}. \quad \boxed{\text{A3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \quad \boxed{\text{A4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

**Гармонические числа.**  $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

Асимптотическая формула:  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ .

$$\boxed{\text{A5}} \text{ Найти два члена асимптотики для } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

$$\boxed{2661} \text{ Найти сумму ряда } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

**Признак Абеля:** если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится,  $b_n$  — монотонная и ограниченная последовательность, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

**Признак Дирихле:** если частичные суммы  $A_m = \sum_{n=1}^m a_n$  ограничены, а  $b_n$  монотонно стремится к 0, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

$$\boxed{2679} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}. \quad \boxed{\text{A6}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

$$\boxed{\text{A7}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}. \quad \boxed{2668} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$\boxed{2677} \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right). \quad \boxed{2671} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}).$$

Определить области абсолютной и условной сходимости следующих рядов (т. е. выяснить, при каких  $x$  ряд сходится абсолютно, а при каких — условно):

$$\boxed{\text{A8}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}. \quad \boxed{2728} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}}.$$

## Домашнее задание № 12

### Матем. анализ, прикл. матем., 3-й семестр

Доказать сходимость ряда и найти сумму:

$$\boxed{2660} \quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

$\boxed{2662}$  Найти суммы:

$$\text{а) } 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{б) } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$\boxed{2666.1}$  Пусть  $b_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$ . Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$  расхо- дится, хотя  $b_n > 0$  и  $b_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

$\boxed{A1}$  С помощью домножения на  $2 \sin \frac{x}{2}$  или с помощью формул Эйлера доказать следующие формулы:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\boxed{A2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \quad \boxed{A3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \boxed{2667} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$\boxed{2670} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \quad \boxed{2673.1} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$$

$$\boxed{2676} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}, \quad \boxed{2680} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p}.$$

Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

$$\boxed{2716} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}, \quad \boxed{2724} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (\text{ряд Ламберта}).$$

**Дополнительное задание: о разложении  $H_n$**

Пусть  $|a_n| \leq \frac{1}{n(n-1)}$  при  $n \geq 2$ . Доказать, что ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  сходится к некоторому конечному пределу  $S$ , и  $|\sum_{k=2}^n a_k - S| < \frac{1}{n}$ .

Доказать, что  $|H_n - \ln n - \gamma| < \frac{1}{n}$ .