Мех.-мат., матем. анализ., 3-й семестр
13-е занятие. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Определить области абсолютной и условной сходимости следующих рядов (т. е. выяснить, при каких x ряд сходится абсолютно, а при каких — условно):

$\boxed{2726}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$. $\boxed{2728}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}}$.

Супремум-норма функции f, определённой на X:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

$\boxed{2741}$ Пусть функции f_n ($n \in \mathbb{N}$) и f определены на X. Доказать, что следующие условия равносильны:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$;

(b) $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$.

$\boxed{\text{T1}}$ Если $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ и все f_n равномерно непрерывны на X, то f тоже равномерно непрерывна на X.

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

$\boxed{2746}$ $f_n(x) = x^n$; а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$\boxed{2747}$ $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$\boxed{2754}$ $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$; $0 < x < +\infty$.

$\boxed{2755а}$ $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$; $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2755б}$ $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$; $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2760}$ $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$;

а) на конечном интервале (a, b);

б) на $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{T2}}$ Пусть $f_n(x) = a_0(n) + a_1(n)x + \ldots + a_d(n)x^n$, $a_i(n) \to c_i$ для любого $i \in \overline{0, n}$, и $g(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_d x^n$. Доказать, что f_n сходится к g равномерно на любом сегменте.

Домашнее задание № 13
Матем. анализ, мех.-мат., 3-й семестр

Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

$\boxed{2716}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$. $\boxed{2724}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (ряд Ламберта).

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

$\boxed{2749}$ $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

$\boxed{2750}$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$\boxed{2752аб}$ $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$; а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $1 < x < +\infty$.

$\boxed{2753}$ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

$\boxed{2756а}$ $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$; $0 < x < +\infty$.

$\boxed{2756б}$ $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$; $0 < x < +\infty$.

$\boxed{2762}$ $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$; $0 \leqslant x \leqslant 2$.

$\boxed{2765}$ Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a,b) и $f_n(x) = n\left(f\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$. Доказать, что $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, где $a < \alpha < \beta < b$.

Дополнительные задания

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть f — некоторая функция, бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$, g_n — последовательность её производных: $g_n(x) = f^{(n)}(x)$. Предположим, что последовательность $g_n(x)$ равномерно сходится на любом сегменте. Выяснить, какой вид тогда обязана иметь функция f.

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть $d \in \mathbb{N}$, g и f_n ($n \in \mathbb{N}$) многочлены степени не выше d, $f_n(x)$ сходится к $g(x)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что f_n сходится к g равномерно на любом сегменте.

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть $d \in \mathbb{N}$, f_n — последовательность многочленов степени не выше d, g — некоторая функция на $\mathbb{R}$, $f_n(x)$ сходится к $g(x)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что g — тоже многочлен степени не выше d.