Мех.-мат., матем. анализ., 3-й семестр
14-е занятие. Равномерная сходимость функциональных рядов

Повторение

Формула Маклорена-Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \xi \in (0,x) \text{ при } x>0; \\ \xi \in (x,0) \text{ при } x<0. \end{cases}$$

$\boxed{2760}$ Исследовать сходимость последовательности $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$;
а) на конечном интервале (a,b); б) на $\mathbb{R}$.

Исследование рядов на равномерную сходимость

$\boxed{2767}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ а) на интервале $|x|<q$, где $q<1$; б) на интервале $|x|<1$.

$\boxed{2773}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)}$;
а) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon>0$; б) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$, где $\varepsilon > 0$.

Признак Вейерштрасса: Если $|f_n(x)| \leqslant a_n$ для любого $x \in X$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится.

$\boxed{2768}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$, $x \in [-1;1]$. $\boxed{2774 \text{ а}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $a,b \geqslant 0$. Доказать, что $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

$\boxed{2774 \text{ г}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

$\boxed{2774 \text{ д}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$.

$\boxed{2795 \text{ а}}$ Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать её на непрерывность, если $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Домашнее задание № 14
Матем. анализ, мех.-мат., 3-й семестр

Исследовать функциональные последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

$\boxed{2762}$ $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$; $\quad 0 \leqslant x \leqslant 2$.

$\boxed{2761}$ $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$; $\quad 1 \leqslant x \leqslant a$.

Исследовать сходимость рядов, найдя формулы для частичных сумм и суммы ряда:

$\boxed{2769}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$\boxed{2770}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; $\quad -1 \leqslant x \leqslant 1$.

$\boxed{2772}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $\quad x > 0$. $\quad$ Подсказка-намёк: $\frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$.

$\boxed{2771}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$; $\quad x > 0$.

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать, что $\operatorname{arctg} t < t$ и $\ln(1+t) < t$ при любом $t > 0$. Указание: исследовать монотонность функций $f(t) = t - \operatorname{arctg} t$ и $g(t) = t - \ln(1+t)$.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

$\boxed{2774\text{ б}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $\quad x > -2$.

$\boxed{2774\text{ в}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $\quad x \geqslant 0$.

$\boxed{2774\text{ ж}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2774\text{ и}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2774\text{ м}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2774\text{ л}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $\quad x \geqslant 0$.

$\boxed{2774\text{ з}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2774\text{ к}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $\quad |x| < a$.

$\boxed{2795\text{ в}}$ Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать её на непрерывность, если $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.