Мех.-мат., матем. анализ., 3-й семестр
16-е занятие. Степенные ряды

Степенной ряд — ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Радиус сходимости степенного ряда есть супремум $|x-x_0|$ по всем x, для которых ряд сходится. Формула *Коши-Адамара* (Couchy-Hadamard) для вычисления радиуса сходимости:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

В интервале (x_0-R, x_0+R), который называют *интервалом сходимости*, ряд абсолютно сходится. При $|x-x_0|>R$ ряд расходится.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

$\boxed{\text{A1}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. $\boxed{\text{A2}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2}\, x^n$. $\boxed{\text{A4}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+3\sin\frac{n\pi}{3}\right)^n}{n+\ln n}\, x^n$.

$\boxed{2813}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}\,(x+1)^n$. $\boxed{2823}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}\quad (a>0)$.

$\boxed{\text{A5}}$ $\ln n < H_n < 1+\ln n$. $\boxed{2827}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

Лемма. Если $a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \mathscr{A}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathscr{A}$.

Найти радиусы сходимости степенных рядов:

$\boxed{2814}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$.

$\boxed{2819}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$.

$\boxed{2825}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\, x^n$.

Домашнее задание № 16
Матем. анализ, мех.-мат., 3-й семестр

Найти радиус и интервал сходимости следующих степенных рядов:

$\boxed{2816}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$ $\boxed{2817}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}\,x^n \quad (a>1).$

$\boxed{2818}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\cdot\frac{1}{2^n}\cdot(x-1)^n.$ $\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$

$\boxed{2824}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}\,x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$ $\boxed{2826}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

$\boxed{2812}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}.$ (Рассмотреть случаи $p>1$, $0<p\leqslant 1$, $p\leqslant 0$.)

$\boxed{2822}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a>0,\ b>0).$

$\boxed{2815}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}\cdot x^n \quad (0<\alpha<1).$

$\boxed{2828}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\cdot x^n.$ $\boxed{2829}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\cdot x^n.$

Дополнительные задания (связь между $\lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ и $\lim\sqrt[n]{|a_n|}$)

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть $a_n\to A$, $S_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Доказать, что $S_n\to A$.

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть $b_n\to B>0$, $P_n=\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n}$. Доказать, что $P_n\to B$.

$\boxed{\text{A4}}$ Пусть $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\to B$. Доказать, что $\sqrt[n]{|a_n|}\to B$.

$\boxed{\text{A5}}$ Привести пример, когда предел последовательности $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ не существует, а предел последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$ существует.