

Мех.-мат., матем. анализ., 3-й семестр
18-е занятие. Ряды Тейлора

Разложив предварительно производные, путём почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

[2869] $f(x) = \operatorname{arctg} x.$

Теорема Абеля. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$

$S(x)$ — сумма ряда при $|x| < R,$ и пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Тогда его сумма равна $\lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$

[A1] С помощью теоремы Абеля найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Найти разложения в степенные ряды следующих функций:

[28736] $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$

[2883] $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}.$

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

[2906] $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$ [2909] $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

[2911] $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$ [2912] $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

Разложить в степенной ряд функцию

[2904] $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt.$

[2915] Показать, что ряд $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ удовлетворяет уравнению

$$xy'' + y' - y = 0.$$

Домашнее задание № 18

Матем. анализ, мех.-мат., 3-й семестр

A1 С помощью теоремы Абеля найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

2872 $f(x) = \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2)$.

Применяя различные методы, найти разложения в степенной ряд следующих функций:

2873а $f(x) = (1+x) \ln(1+x)$. **2873в** $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$.

2873д $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

2873ж $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

2882 $f(x) = (1+x)e^{-x}$. **2885** $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

2907 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

2910 $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

Указание к 2910: производную ряда умножить на $1-x$.

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

2913 $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

Разложить в степенной ряд функции:

2902 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. **2903** $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

2914 Показать, что ряд $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ удовлетворяет уравнению $y^{(4)} = y$.